

## L'OUVRAGE

La pratique du filtrage des signaux sous la double approche analogique et numérique ne saurait être dissociée du vaste édifice des méthodes et techniques du traitement du signal.

L'analyse ou la synthèse, la transposition ou la modélisation des filtres, indépendamment de leur type –passe-bas, passe-haut, passe-bande, optimal, de déconvolution... passent incontestablement par une méthodologie mathématique descriptive adaptée.

Ces préoccupations et surtout les réponses que nous estimons avoir apportées à travers la rédaction du présent ouvrage, ont relèvent d'un critère d'objectivité et de pragmatisme dans l'approche du filtrage, illustré en cela par un choix raisonné d'exercices corrigés inspirés par notre pratique pédagogique.

## LE PUBLIC

Tant en recherche fondamentale qu'en technologie, les approches théoriques des fondements mathématiques ne peuvent revendiquer une exclusivité dans leur appartenance à l'une ou l'autre de ces activités scientifiques ; il y a donc un impératif de perméabilité et de symbiose. C'est dans ce contexte que nous situons cet ouvrage FILTRAGE ANALOGIQUE ET NUMERIQUE qui pourrait intéresser autant les chercheurs que les étudiants en Electronique, Automatisation, Géophysique, Mécanique....

# TABLE DE MATIERES

PREFACE .....	XXIX
NOTATIONS.....	XXIII
ABREVIATIONS.....	XXV

---

Chapitre I : SYSTEMES LINEAIRES.....	1
I-Introduction.....	3
II-DEFINITION.....	4
III-Propriétés d'un système.....	4
III-1 linéarité.....	4
III-2 INVARIANCE PAR TRANSLATION.....	6
III-3 REPOSE IMPULSIONNELLE ND4UN SYSTEME.....	6
III-3-1 DEFINITION.....	6
III-3-2 SYSTEME CONVOLUTIF.....	7
III-4 REPOSE INDICIELLE D'UN SYSTEME.....	9
III-4-1 DEFINITION.....	10
III-4-2 EXPRESSION DE LA REPOSE INDICIELLE D'UN SYSTEME DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL.....	11
III-5 STABILITE D'UN SYSTEME.....	12
III-6 CAUSALITE D4UN SYSTEME.....	13
III-6-1 FONCTION (SIGNAL) CAUSAL.....	13
III-6-2 SYSTEME LINEAIRE CAUSAL.....	14
III-6-3 CAUSALITE ET STABILITE D4UN SYSTEME .....	15
III-6-4 ETUDE D'UN FILTRAGE CAUSAL DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL .....	17
IV-FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME.....	19

IV-1 DEFINITION.....	19
IV-2 APPLICATION A UN SYSTEME DYNAMIQUE.....	20
IV-2-1DEFINITION D'UN SYSTEME (Filtre) DYNAMIQUE.....	20
IV-2-2 FON CTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE.....	20
IV-3 ZEROS ET POLES D'UNE FONCTION DE TRANSFERT.....	21
IV-3-1 ZEROS D'UNE FONCTION DE TRANSFERT.....	21
IV-3-2 POLES D'UNE FONCTION DE TRANSFERT.....	21
IV-3-3 CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE CAUSALITE ET DE STABILITE D'UN SYSSTEME DYNAMIQUE.....	21
V-DYNAMIQUE D'UN SYSTEME .....	24
V-1 ECHELLE EN DECIBELS.....	24
V-2 DYNAMIQUE D'UN SYSTEME .....	24
VI-GAIN COMPLEXE- GAIN REEL- RETARD DE PHASE.....	25
VI-1 INTRODUCTION.....	25
VI-2 GAIN COMPLEXE D'UN SYSTEME .....	25
VI-3 GAIN REEL.....	26
VI-4 COURBE DE PHASE .....	26
VI-5 INTERPRETATION DES COURBES DE GAIN ET DE PHASE.....	26
VI-6 AUTRES ETUDES ET REPRESENTATION DU GAIN REEL.....	27
VI-6-1 COURBE DE PUISSNACE DE GAIN .....	27
VI-6-2 PUISSANCE DE GAIN SUR UN OCTAVE.....	27
VI-7 RELATION ENTRE LA FONCTION DE TRANSFERT ET LE GAIN COMPLEXE.....	30
VII- RECHERCHE D'UNE REPRESENTATION GRAPHIQUE DU GAIN COMPEXE.....	31
VIII-SYSTEME (FILTRE) SANS DISTORSION.....	33
VIII-1 DEFINITION.....	33
VIII-2 REPONSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE SANS DISTORSION.....	34
VIII-3 REPONSE D'UN SYSTEME SANS DISTORSION.....	34
IX-SYSTEME (FILTRE) SANS DISTORSION DE PHASE.....	35
IX-1 DEFINITION.....	35

IX-2 REPOSE IMPULSIONNELE D'UN SYSTEME SANS DISTORSION DE PHASE.....	35
IX-3 PROPRIETE DE SYMETRIE DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE D'UN SYSTEME SANS DISTORSION DE PHASE.....	36
IX-4 VALEUR MAXIMALE DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE.....	36
IX-5 DUREE DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE D'UN SYSTEME SANS DISTORSION DE PHASE.....	37
IX-6 TEMPS DE MONTEE DANS LE CAS DE LA REPOSE INDICIELLE.....	38
X- SYSTEME (FILTRE) SANS DISTORSION D'AMPLITUDE.....	39
XI- CLASSIFICATION DES SYSTEMES.....	40
XI-1 SYSTEMES ANALOGIQUES.....	40
XI-2 SYSTEMES NUMERIQUES.....	41
XI-3 SYSTEMES HYBRIDES.....	41
XII- IDENTIFICATION – SIMULATION .....	43
XII-1 ORGANISATION D'UN SYSTEME COMPLEXE.....	43
XII-2 IDENTIFICATION.....	43
XII-3 MODELISATION D'UN SYSTEME.....	44
XII-4 SIMULATION DE SYSTEMES CONTINUS.....	44
XIII- SYSTEMES PHYSIQUES NON-LINEAIRES.....	46
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE I – SOLUTIONS - .....</u>	<u>46</u>
CHAPITRE II : FILTRAGE ET FILTRES USUELS.....	73
I-FILTRAGE.....	74
I-1 DEFINITION.....	74
I-2 LES CLASSES DE FILTRES.....	74
II- FILTRE IDEAL.....	76
III- FILTRE PASSE-BAS.....	76
III-1 FILTRE PASSE-BAS IDEAL.....	76
III-1-1 REPOSE IMPULSIONNELLE.....	76
III-1-2 REPOSE INDICIELLE.....	79
III-1-3 REPOSE D'UN FILTRE PASSE-BAS IDEAL A UNE EXCITATION PERIODIQUE .....	80

III-2 FILTRE PASSE-BAS GENERALISE.....	81
III-2-1 GAIN COMPLEXE D'UN FILTRE PASSE-BAS GENERALISE.....	82
III-2-3 CALCUL DE LA REponse IMPULSIONNELLE PAR DEVELOPPEMENT EN SERIES DE FOURIER.....	82
III-2-4 CALCUL DE LA REponse IMPULSIONNELLE PAR DEVELOPPEMENT EN SERIE DE PUISSANCES.....	84
III-3 FILTRE PASSE-BAS TYPE BUTTERWORTH.....	85
III-3-1 DETERMINATION.....	85
III-3-2 CALCUL DE L'ORDRE D'UN FILTRE DE BUTTERWORTH.....	87
III-3-3 REponse IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE DE BUTTERWORTH.....	87
III-3-4 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU FILTRE DE BUTTERWORTH.....	88
III-4 FILTRE PASSE-BAS TYPE CHEBYCHEV.....	88
III-4-1 POLYNOMES ORTHOGONAUX DE CHEBYCHEV.....	88
III-4-2 FONCTION GAIN D'UN FILTRE DE CHEBYCHEV.....	91
III-4-3 DETERMINATION DE L'ORDRE DU FILTRE DE CHEBYCHEV.....	91
III-4-4 EXPRESSION DU FILTRE DE CHEBYCHEV DE TYPE II EN FONCTION DU FILTRE DE CHEBYCHEV DE TYPE I.....	92
III-4-5 POLES DU FILTRE DE CHEBYCHEV DE TYPE I.....	93
IV- FILTRE PASSE-HAUT.....	96
IV-1 DEFINITION.....	96
IV-2 REponse IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE PASSE-HAUT.....	97
IV-3 REponse INDICIELLE D'UN FILTRE PASSE-HAUT.....	98
V- FILTRE PASSE-BANDE.....	99
V-1 FILTRE PASSE-BANDE IDEAL.....	99
V-2 REponse IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE PASSE-BANDE IDEAL.....	100
V-3 FILTRE PASSE-BAS EQUIVALENT A UN FILTRE PASSE-HAUT.....	102
VI- FILTRE COUPE-BANDE.....	103
VII- FILTRE D'ANTI-REPLEMENT.....	104

VIII- CONSTRUCTION D'UN FILTRE QUELCONQUE PAR TRANSFORMATION D'UN FILTRE PASSE-BAS.....	106
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE II – SOLUTIONS.....</u>	<u>109</u>
CHAPITRE III : FILTRAGE NUMERIQUE.....	123
I-LE FILTRAGE NUMERIQUE : UNE NECESSITE.....	125
II- REPRESENTATION SCHEMATIQUE D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	126
II-1 BLOC-DIAGRAMME OU REALISATION.....	126
II-2 OPERATIONS DE REALISATION.....	126
II-2-1 OPERATEURS ARITHMETIQUES.....	126
II-2-1 OPERATEUR DE RETARD.....	127
III- ELEMENTS MATHEMATIQUES D'ETUDE D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	127
III-1 SIGNAUX DISCRETS.....	127
III-2 SIGNAUX DISCRETS REMARQUABLES.....	129
III-2-1 IMPULSION DE DIRAC DISCRETE.....	129
III-2-2 IMPULSION ECHELON-UNITE DISCRETE.....	129
III-3 LES TRANSFORMATIONS MATHEMATIQUESUSUELLES DANS L'ETUDE DES FILTRES NUMERIQUES.....	129
IV- LA CONVOLUTION DISCRETE.....	130
V- REPOSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	133
V-1 DEFINITION.....	133
V-2 FILTRE NUMERIQUE CAUSAL.....	134
V-2-1 DEFINITION .....	134
V-2-2 COMPOSITION DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE D'UN FILTRE NUMERIQUE CAUSAL.....	134
VI- EXPRESSION DU SIGNAL DE SORTIE D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	135
VII- FONCTION DE TRANSFERT D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	137
VIII- FILTRE NUMERIQUE STABLE.....	138

IX- EQUATION AUX DIFFERENCES REGISSANT LE FONCTIONNEMENT	
D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	139
X- FONCTION DE TRANSFERT D'UN FILTRE NUMERIQUE.....	140
X- DETERMINATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT.....	140
X-2 REMARQUES IMPORTANTES.....	142
XI- APPLICATIONS DE L'EQUATION AUX DIFFERENCES	
AUX REALISATIONS ARCHETECTURALES.....	143
XI-1 INTRODUCTION .....	143
XI-2 EQUATIONS AUX DIFFERENCES ET BLOC DIAGRAMMES.....	144
XI-3 REALISATION EN CASCADE ET EN PARALLELE .....	146
XII- LES GRANDES FAMILLES DE SYSTEMES NUMERIQUES.....	149
XII-1 SYSTEMES NUMERIQUES RECURSIFS.....	149
XII-1-1 ALGORITHME DE FONCTIONNEMENT .....	149
XII-1-2 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME NON-RECURSIF.....	150
XII-1-3 GAIN COMPLEXE D'UN SYSTEME NON-RECURSIF.....	150
XII-1-4 BLOC-DIAGRAMME D'UN SYSTEME NON-RECURSIF.....	152
XII-2 SYSTEMES NUMERIQUES RECURSIFS.....	152
XII-2-1 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT.....	152
XII-2-2 ALGORITHME RECURSIF.....	154
XII-2-3 GAIN COMPLEXE D'UN SYSTEME RECURSIF.....	154
XIII- ETUDE D'UNE CELLULE DE PREMIER ORDRE.....	155
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE III – SOLUTIONS.....</u>	<u>161</u>
CHAPITRE IV : TRANSPOSITION ANALOGIQUE / NUMERIQUE SIMULATION.....	193
I-BUT ET PRINCIPE DE LA TRANSPOSITION D'UN FILTRE ANALOGIQUE	
EN UN FILTRE NUMERIQUE.....	195
II- DEUX CORRESPONDANCES ENTRE LES PLANS ‘P’ , ‘Z’	
ET LE DOMAINE FREQUENTIEL.....	196
II-1 CORRESPONDANCE PAR EQUIVALENCE DE LA DERIVATION.....	196
II-1-1 EQUIVALENCE DE LA DERIVATION .....	196
II-1-2 IMAGE DE L'AXE IMAGINAIRE.....	197

II-2 CORRESPONDANCE PAR EQUIVALENCE DE L'INTEGRATION	
DU TRANSFORMATION BILINEAIRE.....	199
II-2-1 MISE AU POINT DE LA TRANSFORMATION BILLINEAIRE.....	199
II-2-2 IMAGE DE L'AXE IMAGINAIRE PAR LA TRANSFORMATION	
BILINEAIRE- CORRESPONDANCE DES FREQUENCES.....	201
II-3 IMAGE DU CERCLE UNITE DANS LE PLAN "P".....	203
III- LES DIFERENTES TECHNIQUES DE SIMULATION OU DE	
TRANSPOSITION ANALOGIQUE/NUMERIQUE.....	204
III-1 INTRODUCTION.....	204
III-2 CLASSIFICATION DES METHODES DE SIMULATION.....	205
III-3 TRANSPOSITION PAR LA VARIANCE IMPULSIONNELLE.....	206
III-4 TRANSPOSITION PAR MODELISATION.....	207
III-5 SIMULATION PAR TRANSFORMATION BILINEAIRE.....	209
III-6 CONSTRUCTION D'UN FILTRE NUMERIQUE A PARTIR	
DE SES CARACTERISTIQUES.....	210
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV– SOLUTIONS.....</u>	<u>219</u>
CHAPITRE V : FILTRAGE OPTIMAL – DECONVOLUTION.....	253
I-FILTRAGE OPTIMAL.....	255
I-1 POSITION DU PROBLEME.....	255
I-2 FILTRAGE OPTIMAL AU SENS DES MOINDRES CARRES DIT DE WIENER.....	255
I-2-1 APPROCHE MATHEMATIQUE.....	255
I-2-2 EQUATIONS DE WIENER-HOPF.....	255
I-2-3 MATRICE DE TOEPLITZ .....	258
I-2-4 ALGORITHME DU SYSTEME D'EQUATIONS DE WIENER-HOPF.....	260
II- FILTRE INVERSE AU SENS DE WIENER .....	264
II-1 FILTRE INVERSE OU DECOUVOLUTION.....	264
II-2 FILTRE INVERSE DE WIENER.....	266
II-3 DECONVOLUTION PAR "COMPRESSION" DU SIGNAL.....	267
II-4 DECONVOLUTION PREDICTIVE.....	268



II-4-1 PREDICTION LINEAIRE.....	268
II-4-2 CONSTRUCTION DU FILTRE DE PREDICTION LINEAIRE.....	269
II-4-3 ERREUR DE PREDICTION LINEAIRE.....	270
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE V – SOLUTIONS.....</u>	<u>273</u>
CHAPITRE VI : MODELISATION PARAMETRIQUE AUTO-REGRESSIVE ANALYSE SPECTRALE EVOLUTIVE.....	281
I-LA MODELISATION PARAMETRIQUE :	
UNE NECESSITE.....	283
I-1 INTRODUCTION.....	283
I-2 MOTIVATIONS .....	283
II- FONCTION D’AUTO-CORRELATION ET REPOSE D’UN SYSTEME INEAIRE.....	283
III- EQUATION AUX DIFFERENCES.....	385
III-1 RESOLUTION DE L’EQUATION AUX DIFFERENCES PAR RAPPORT AU $k^{\text{ème}}$ ECHANTILLON .....	286
III-2 L’EQUATION AUX DIFFERENCES DANS LE DOMAINE ‘Z’.....	286
IV- ETUDE D’UN SYSTEME EXCITE PAR UN BRUIT BLANC.....	287
V- EQUATION AUX DIFFERENCES POUR LA CORRELATION.....	288
V-1 EQUATIONS DE YULE-WALKER.....	288
V-2 RESOLUTION DU SYSTEME D’EQUATIONS DE YULE-WALKER.....	292
V-2-1 ALGORITHME DE DURBIN-LEVINSON .....	292
V-2-2 ALGORITHME DE BURG.....	295
V-2-3 REPRESENTATION EN TREILLIS DE L’ALGORITHME DE BURG.....	300
VI- EQUATION AUX DIFFERENCES DANS LE CALCUL DES DENSITES SPECTRLAES .....	303
VII- ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE .....	305
<u>EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI – SOLUTIONS.....</u>	<u>307</u>
BIBLIOGRAPHIE .....	301

