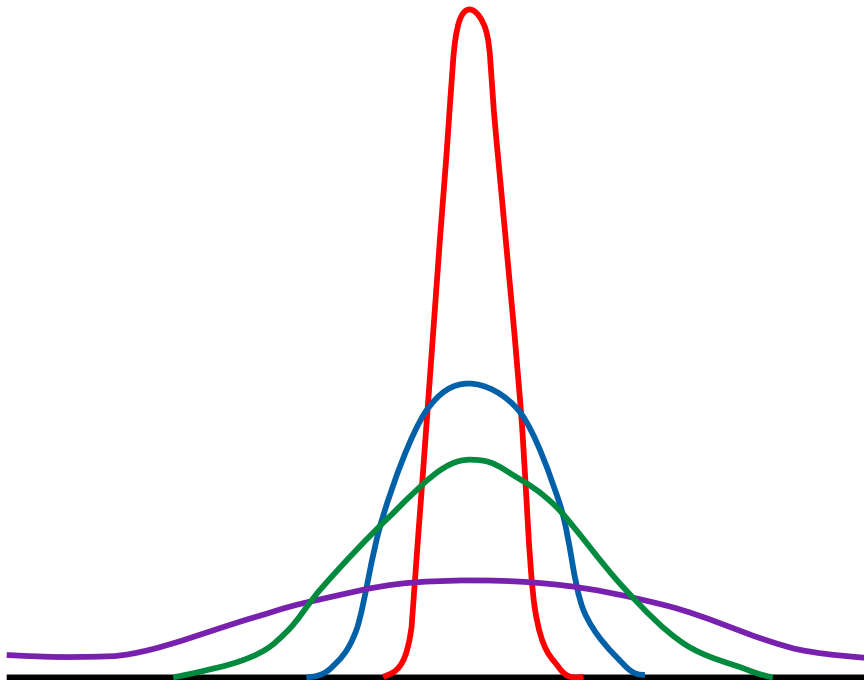


**K. BADDARI
A. ABASSOV**

**EQUATIONS
DE LA
PHYSIQUE
MATHEMATIQUE
APPLIQUEES**



Ce livre formalise le lien entre le caractère mathématique et certains phénomènes physiques correspondants. Il décrit l'approche des phénomènes physiques par les équations de la physique mathématique.

Il met l'accent sur le rôle pédagogique en détaillant autant que possible les démonstrations des théorèmes et des concepts mathématiques nécessaires pour établir des modèles physiques à des processus déterminés. Il traite des équations relatives à la simplification de problèmes et leurs solutions générales.

INTRODUCTION

L'objectif du cours des équations de la physique mathématique appliquées est de fournir à l'étudiant les outils mathématiques utilisés dans les cours de physique, géophysique, mécanique, électronique et des autres sciences techniques. L'enseignement de ces disciplines repose sur la modélisation des phénomènes complexes aux moyens d'équations mathématiques. Il s'agit alors, de formuler mathématiquement des lois sur des processus physiques et exploiter l'interprétation de ces équations pour illustrer des phénomènes physiques observés et mesurés.

Le phénomène physique est un ensemble de variations liées par des rapports de causalité que subissent des corps déterminés dans le temps et dans l'espace. La physique mathématique apprécie, dans ce cas, toutes les variations quantitatives se manifestant dans des phénomènes physiques. Elles établissent des liaisons régulières et des rapports de cause à effet déterminés dans la variation des grandeurs observées. Elle permet de construire un schéma conventionnel à l'aide d'équations mathématiques traduisant les caractéristiques du processus et permettant de dégager des lois fondamentales, ainsi que les détails complémentaires du phénomène étudié. La mise en œuvre des équations de la physique mathématique a un objectif pratique et a à fournir des méthodes d'analyse des lois de la nature. Ces dernières qui gouvernent les phénomènes magnétiques, électriques, électromagnétiques, mécaniques, électromécaniques, hydrodynamiques et autres sont soumises à une analyse mathématique suivie d'une vérification expérimentale. Les problèmes mathématiques posés, à cet effet, contiennent beaucoup d'éléments communs et constituent l'objet de la physique mathématique.

Les disciplines caractérisant ce domaine de la science sont les mathématiques. Cependant, la problématique est fortement liée aux problèmes de la physique, ayant une certaine spécificité.

Les équations relatives à la physique mathématique sont très nombreuses. L'objet de cet ouvrage considère les équations de la physique mathématique appliquées et basées surtout sur les équations différentielles ordinaires. L'étude de chaque équation commence par la formulation d'un problème physique simple conduisant à une équation d'un type donné. Une attention particulière est donnée à la problématique mathématique et sa relation avec l'interprétation physique du phénomène étudié.

Chaque chapitre est limité au strict niveau nécessaire à la compréhension des définitions des principes et des théorèmes accompagnés d'exercices d'application. Ces derniers ont pour but essentiel l'apprentissage effectif des éléments introduits dans la théorie.

Cet ouvrage contient l'outil qui permet à l'étudiant des sciences et technologies et des sciences physiques d'assimiler les concepts fondamentaux de l'application des équations de la physique mathématique devenues un élément essentiel dans la formation des licenciés, des masters et doctorants. Les étudiants tireront de cet ouvrage les démarches à suivre pour la compréhension des équations de la physique mathématique et la façon d'assimiler la physique sous-jacente.

Nous tenons à remercier le Dr. M. Hedibel pour ses conseils appréciés.

Table des matières

Introduction	05
Chapitre I. Equations de la physique mathématique	
I.1 Classification des équations	07
I.1.1 Notions générales	07
.....	07
I.1.2 Equation linéaire homogène de premier ordre	09
.....	10
I.1.3 Types d'équations du second ordre	10
.....	12
I.2 Transformations des équations de deuxième ordre	19
.....	21
I.2.1 Invariance du type d'équation	34
.....	37
I.2.2 Forme canonique	40
.....	40
I.2.3 Solution générale	42
.....	43
I.3 Equations principales de la physique mathématique	46
.....	49
I.4 Position des problèmes de la physique mathématique	
.....	
I.5 Problèmes pour les équations hyperboliques	69
.....	69
I.6 Problèmes pour les équations paraboliques	75
.....	79
I.7 Problèmes pour les équations elliptiques	79
.....	83
I.8 Problème correct	84
.....	87
I.9 Problèmes non homogènes	88
.....	95
I.10 Fonction delta de Dirac	99
.....	
I.11 Exercices	
.....	109
Chapitre II. Equations hyperboliques	
.....	109
.....	111
II.1 Equation de vibrations d'une corde. Solution de d'Alembert	114
.....	116
II.2 Equation hyperbolique à deux variables indépendantes	119
.....	120
II.3 Equation d'onde	124
.....	126
II.3.1 Formule de Poisson	126

.....	127
II.3.2 Ondes cylindriques.....	127
II.3.3 Equation d'onde non homogène	129
II.3.4 Source ponctuelle	131
II.4 Problème de Cauchy pour la propagation du son et des petites vibrations de gaz	131 134
II.5 Formule de Kirchoff	136
II.6 Exercices	171
Chapitre III. Méthode de Fourier	171
III.1 Problème de Sturm – Liouville	172 177 185
III.1.1 Position du problème. Notions générales	
III.1.2 Propriétés des valeurs propres	203
III.2 Schéma général de la méthode de Fourier	204 207
III.2.1 Equation hyperbolique	209 210
III.2.2 Equation parabolique	210 210
III.3 Vibrations propres d'une corde finie	211 211
III.4 Notions sur la solution généralisée	213 213
III.5 Convenance du problème mixte	219 221
III.5.1 Intégrale de l'énergie	223 225
III.5.2 Convenance du problème	
III.6 Intégrale de Fourier	
III.7 Transformée de Fourier	249
III.8 Problème non homogène	251 253
III.8.1 Oscillations forcés d'une tige aux extrémités fixées	261 264
III.8.2 Oscillations forcées d'une tige aux extrémités mobiles	273 274
III.9 Exercices	274 279 286

	293
Chapitre IV. Equations paraboliques	294
	301
IV.1 Premier problème aux limites. Théorème du maximum et du minimum	304
.....	309
IV.1.1 Position du problème	318
.....	323
IV.1.2 Solution du premier problème aux limites de l'équation de la chaleur	323
.....	326
IV.2 Problème de Cauchy	330
.....	
IV.3 Exercices	
.....	335
Chapitre V. Equations elliptiques	335
	336
V.1 Equation de Laplace	337
.....	338
V.2 Formule de Green. Représentation intégrale d'une fonction arbitraire	339
.....	345
V.3 Propriétés principales des fonctions harmoniques	
.....	346
V.4 Problèmes principaux de l'équation de Laplace	349
.....	350
V.4.1 Problème intérieur de Dirichlet	353
.....	356
V.4.2 Problème intérieur de Neumann.....	358
V.4.3 Troisième problème aux limites	362
.....	371
V.5 Fonction de Green de l'opérateur de Laplace	377
.....	383
V.5.1 Fonction de Green du problème de Dirichlet	395
.....	395
V.5.2 Propriétés de la fonction de Green	398
.....	399
V.6 Solution du problème de Dirichlet pour une sphère.....	400
	400
V.7 Problème extérieur de Dirichlet pour une boule	401
V.8 Comportement des dérivées des fonctions harmoniques à l'infini	401
.....	402
V.9 Théorème d'unicité du problème de Neumann	405
.....	405
V.10 Exercices	406
.....	406
	407
	407
	408
	408
	408

Chapitre VI. Théorie du potentiel	409
VI.1 Potentiel de volume et des couches simples et doubles	410
.....	412
VI.2 Intégrales impropres dépendant d'un paramètre	419
.....	423
VI.3 Potentiel de volume	427
.....	431
VI.4 Surface de Liapounov	433
.....	
VI.5 Potentiel d'une couche double	
.....	
VI.6 Potentiel d'une couche simple	
.....	
VI.7 Force d'attraction gravitationnelle et son potentiel	
.....	
VI.7.1 Force d'attraction et son potentiel	
.....	
VI.7.2 Dérivées du potentiel gravitationnel	
.....	
VI.7.3 Expressions intégrales générales des dérivées du potentiel gravitationnel	
.....	
VI.7.4 Equations de Laplace et de Poisson	
.....	
VI.7.5 Formule de Green	
.....	
VI.7.6 Formule de Green pour les fonctions harmoniques	
.....	
VI.7.7 Problèmes de Dirichlet et de Neumann	
.....	
VI.7.8 Potentiel d'attraction d'une couche sphérique et d'une sphère	
.....	
VI.8 Problèmes de la prospection électrique	
.....	
VI.9 Ondes élastiques et ondes électromagnétiques	
.....	
VI.9.1 Ondes élastiques dans un milieu homogène	
.....	
VI.9.2 Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur	
.....	
VI.10 Exercices	
.....	

Chapitre VII. Quelques fonctions spéciales

VII.1 Fonctions de Bessel

VII.1.1 Matérialisation physiques de l'équation de Bessel

VII.1.2 Oscillations d'un fil pesant

VII.1.3 Oscillations d'une membrane circulaire

VII.1.4 Equation de diffusivité

VII.1.5 Détermination de la fonction de Bessel de première espèce

VII.1.6 Fonction de Bessel de deuxième espèce

VII.1.7 Equation différentielle conduisant à l'équation de Bessel. Fonction de Bessel de troisième espèce

VII.1.8 Fonction génératrice de la fonction Bessel

VII.1.9 Propriétés de la fonction de Bessel de première et troisième espèces

VII.1.10 Formules intégrales de la fonction de Bessel de première et troisième espèces

VII.1.11 Intégrale de Weber-Lipchitz

VII.1.12 Orthogonalité de la fonction de Bessel

VII.1.13 Application de la fonction de Bessel à la solution des problèmes de physique mathématique

VII.1.14 Fonctions de Hankel

VII.1.15 Intégrale de Fourier-Bessel

VII.1.16 Exercices

VII.2 Polynômes de Legendre

VII.2.1 Fonction génératrice et polynôme de Legendre

VII.2.2 Formule de récurrence

VII.2.3 Equation de Legendre

VII.2.4 Orthogonalité des polynômes de Legendre

VII.2.5 Norme des polynômes de Legendre

.....

VII.2.6 Zéros des polynômes de Legendre

.....

VII.2.7 Limites des polynômes de Legendre

.....

VII.2.8 Exercices

.....

VII.3 Polynômes de Chebychev-Hermite

.....

VII.3.1 Formule différentielle

.....

VII.3.2 Formules de récurrence

.....

VII.3.3 Equation de Chebychev-Hermite

.....

VII.3.4 Norme des polynômes $H_n(x)$

.....

VII.3.5 Fonction de Chebychev- Hermite

.....

VII.4 Polynômes de Laguerre

.....

VII.4.1 Equation différentielle de Laguerre. Polynômes de Laguerre

.....

VII.4.2 Propriétés des polynômes de Laguerre

.....

VII.4.3 Polynômes orthogonaux et leurs propriétés

.....

VII.5 Exercices

.....

VII.6 Fonctions sphériques

.....

VII.6.1 Exemple d'application des fonctions sphériques

.....

VII.6.2 Analyse sphérique des données géophysiques

.....

VII.7 Exercices

.....

Bibliographie

.....

Table des matières

.....