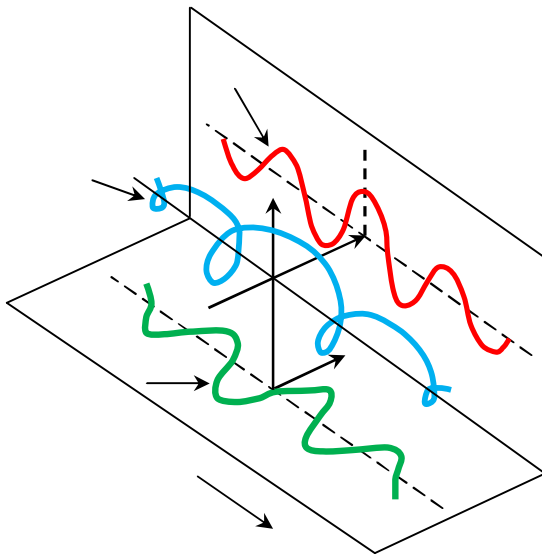


K. BADDARI
A. ABBASSOV

Théorie et pratique des fonctions d'une variable complexe

Application à la physique de la terre et au génie pétrolier



Avant propos

Le présent ouvrage traite à la fois de la théorie et de la pratique des fonctions d'une variable complexe dans les domaines des sciences et de la technologie.

Les fonctions élémentaires d'une variable complexe ont été tout d'abord étudiées par le mathématicien Euler qui en a donné les conditions de différentiabilité et les éléments de calcul intégral. Bien plus tard, en 1755, les applications ont été étendues à d'autres domaines notamment l'hydrodynamique et la cartographie. Au milieu du XIX^{ème} siècle, Cauchy et Poincaré et bien d'autres ont expérimenté ces fonctions dans le calcul intégral et la représentation des séries par une fonction.

Le calcul symbolique qui est une discipline qui s'intéresse à la résolution des problèmes de la physique appliquée et de la physique mathématique est le produit de la recherche sur les fonctions d'une variable complexe. Heaviside à la fin du dix neuvième siècle en est le précurseur, tout comme Schwartz en 1945 qui a mis au point la théorie des distributions.

Le présent ouvrage expose les méthodes de base de cette théorie destinée aux applications physiques et technologiques, tels que la physique de la terre, la physique mathématique, la théorie des fonctions spéciales, le traitement du signal, la mécanique des chantiers pétroliers, l'électrotechnique, etc. D'autres champs d'application restent ouverts à cette théorie. La transposition de cette théorie aux champs d'application précités conserve l'aspect théorique lié à cette partie des mathématiques qu'on retrouve dans les travaux d'Euler, Laplace, Fourier, Poisson, Cauchy, Weierstrass, Riemann et Heaviside. La dernière partie de cet ouvrage s'intéressera plus particulièrement aux applications à la physique de la terre.

L'ouvrage a été enrichi par les remarques et observations de nos collègues qui ont bien voulu accepter de relire le manuscrit de l'ouvrage. Nous tenons à remercier chaleureusement F. Flici, A. Herzallah et V. Tourtchine de la faculté des sciences, ainsi que M.A. Aitouche de la faculté des hydrocarbures et de la chimie pour leur précieuse collaboration.

Table des matières

Avant propos	05
Chapitre I : Nombres complexes	
I.1 Ensemble des nombres complexes	07
I.2 Opérations fondamentales sur les nombres complexes	07
I.3 Représentation graphique des nombres complexes	08
I.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe	10
I.5 Projection stéréographique	12
I.6 Ensemble de points d'un plan complexe	14
I.7 Limite d'une suite de nombres complexes	16
Chapitre II : Fonction d'une variable complexe	
II.1 Définition d'une fonction d'une variable complexe	19
II.2 Limite d'une fonction d'une variable complexe	20
II.3 Continuité d'une fonction d'une variable complexe	21
Chapitre III : Dérivée	
III.1 Condition de d'Alembert- Euler	23
III.1.1 Définition d'une dérivée	23
III.1.2 Condition de d'Alembert -Euler	24
III.1.3 Propriété d'une dérivée	27
III.1.4 Différentielle	27
III.2 Sens géométrique du module et de l'argument d'une dérivée d'une fonction. Transformation conforme	28
III.2.1 Cas d'une fonction complexe d'une variable réelle	28
III.2.2 Cas d'une fonction d'une variable complexe	29
III.3 Sens géométrique du module de la dérivée	31
III.4 Transformation conforme	31
Chapitre IV : Fonctions élémentaires et transformations conformes	
IV.1 Fonctions homographiques. Conformité	33
IV.2 Fonction puissance $w = z^n$	39
IV.3 Fonction $w = \sqrt[n]{z}$	39
IV.4 Fonction de Joukovsky $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$	41
IV.5 Fonction exponentielle $w = e^z$	43
IV.6 Logarithme	45
IV.7 Fonctions trigonométrique et hyperbolique	

IV.8 Fonctions trigonométriques inverses	46
IV.9 Fonctions hyperboliques inverses	48
IV.10 Fonction z^α	48
IV.11 Fonctions algébriques et transcendantes	49

Chapitre V : Lien entre fonction harmonique et fonction analytique

V.1 Etablissement d'une fonction analytique par sa partie réelle (imaginaire)	
V.2 Relation entre le problème plan de la théorie de filtration et la théorie des fonctions analytiques	51
V.3 Application de la transformation conforme dans quelques problèmes de filtration	53
	60

Chapitre VI : Intégration des fonctions d'une variable complexe

VI.1 Définition de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe	
VI.1.1 Définition de l'intégrale	65
VI.1.2 Propriété des intégrales d'une fonction d'une variable complexe	65
VI.2 Théorème de Cauchy	67
VI.3 Intégrale indéterminée	69
VI.4 Formule intégrale de Cauchy et son application	73
VI.5 Différentiabilité illimitée d'une fonction	76
VI.6 Théorème de Liouville	79
	81

Chapitre VII : Représentation des fonctions analytiques par des séries

VII.1 Séries fonctionnelles	
VII.2 Séries entières. Disque de convergence	84
VII.3 Zéros d'une fonction analytique. Théorème d'unicité	87
VII.4 Série de Laurent	92
VII.5 Points singuliers isolés d'une fonction analytique	93
VII.6 Comportement d'une fonction analytique à l'infini	99
VII.7 Prolongement analytique	105
VII.8 Prolongement analytique d'une fonction analytique réelle d'une variable réelle	106
VII.9 Application à l'hydrodynamique	108
VII.9.1 Flux de fluide irrotationnel libre	108
VII.9.2 Fonction caractéristique d'un flux	108
VII.9.3 Mouvement d'un cylindre dû à un flux sans circulation	111
VII.9.4 Flux circulaire	113
VII.9.5 Cas général	117
	118

Chapitre VIII : Théorie des résidus

	121
VIII.1 Résidu d'une fonction analytique à un point singulier isolé ...	121
VIII.1.1 Définition du résidu à un point singulier isolé (fini)	122
VIII.2 Formules de calcul du résidu à un point singulier fini	124
VIII.3 Calcul du résidu à un point infiniment éloigné	125
VIII.4 Théorème principal des résidus	127
VIII.5 Théorème de la somme des résidus	

Chapitre IX : Application de la théorie des résidus au calcul des intégrales définies

IX.1 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	130
IX.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$	132
IX.3 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$	139
IX.4 Cas de fonctions multiformes	141

Chapitre X : Séries trigonométriques de Fourier. Intégrales de Fourier

	147
X.1 Forme complexe de la série de Fourier	150
X.2 Intégrale de Fourier	150
X.2.1 Définition	155
X.3 Caractéristiques spectrales de la série de Fourier	162
X.4 Propriété de la transformation discrète de Fourier	163
X.4.1 Convolution de la transformée de Fourier	164
X.4.2 Passage du spectre continu au spectre discret	
X.4.3 Critère de différence entre le spectre continu et le spectre discret	167
X.4.4 Forme matricielle d'une transformation de Fourier discrète ...	169

Chapitre XI : Calcul symbolique

	173
XI.1 Original et image	176
XI.2 Propriétés de la transformation de Laplace	187
XI.3 Image de la fonction de Dirac	190
XI.4 Théorème d'inversement	198
XI.5 Théorème de développement	
XI.6 Application des méthodes de la recherche symbolique aux problèmes de la mécanique d'exploitation pétrolière	202

Chapitre XII : Quelques applications en physique de la terre

	257
XII.1 Equations de la théorie linéaire de l'élasticité	
XII.2 Fonctions des contraintes et réduction des problèmes principaux aux limites de la théorie d'élasticité à des problèmes aux limites pour les fonctions analytiques d'une variable complexe	261
XII.3 Premier problème principal de la théorie d'élasticité pour un cercle	266
XII.4 Deuxième problème principal de la théorie d'élasticité pour un cercle	268
XII.5 Transformations de Fourier appliquées aux données gravitationnelles et magnétiques	270
XII.5.1 Théorèmes sur les spectres	273
XII.5.1.1 Théorème d'addition	274
XII.5.1.2 Théorème du retard	274
XII.5.1.3 Spectre de la dérivée	
XII.5.1.4 Théorème sur le spectre de la dérivée par rapport à un paramètre	275
XII.5.1.5 Théorème des énergies (égalité de Parseval)	276
XII.5.1.6 Théorème sur l'intégrale d'une convolution	277
XII.5.1.7 Démonstration du théorème de convolution pour deux variables	279
XII.5.2 Représentations fréquentielles des dérivées des potentiels gravitationnel et magnétique	280
XII.6 Forme complexe de la série de Fourier appliquée en sismique.	285
XII.6.1 Notion sur le spectre complexe discret	289
XII.6.2 Détermination des coefficients de la série de Fourier	291
XII.6.3 Impulsions de signaux. Spectres continus	
XII.6.4 Relation entre le spectre de phase-amplitude et le spectre de phase-fréquence d'un signal sismique	295
XII.6.4.1 Relation entre les parties réelle et imaginaire d'un signal complexe. Notion sur la transformée de Hilbert	295
XII.6.4.2 Notions sur le signal analytique	299
XII.6.4.3 Relation entre le module et la phase d'un spectre de fréquence et le signal analytique	301
XII.7 Analyse spectrale en sismique	305
XII.7.1 Discussion sur l'analyse spectrale en sismique	312
XII.7.2 Corrélation	317
XII.7.3 Relation entre l'auto-corrélation et le spectre de puissance .	319
XII.7.4 Détermination des paramètres spectraux	323
XII.8 Analyses cepstrales dans l'exploration sismique	324
XII.8.1 Aperçu sur l'analyse cepstrale	
XII.9 Dérivation des paramètres sismiques en utilisant les analyses des traces complexes	328
XII.10 Solution de l'équation de Laplace. Séparation des variables en coordonnées cartésiennes	341
XII.11 Problème de Dirichlet pour un demi espace $z > 0$	343
XII.12 Séparation de variables en coordonnées cylindriques	345
	346

XII.13 Prolongement vers le bas	349
XII.14 Prolongement des fonctions harmoniques	349
XII.14.1 Calcul des coefficients de prolongement	354
XII.15 Calcul des composantes du champ magnétique	
XII.16 Types de champs cylindriques, leurs développement et asymptotes	357
XII.17 Transformation intégrales et théorie de composition des fonctions cylindriques	362
	367
Bibliographie	369
Table des matières	