

l'intégrale

Série E. Ramis
Claude Deschamps
André Warusfel

Jean François Ruaud • François Moulin
Michel Volcker • Claude Lebreton
Anne Miquel

MATHÉMATIQUES

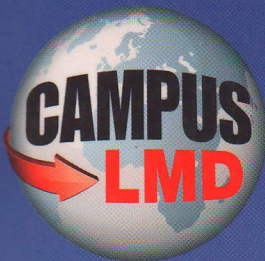
TOUT - EN - UN

MP • MP*

3^e édition

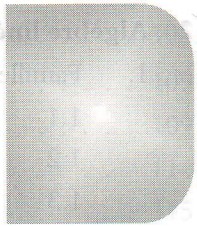
Le cours de référence

- Un cours complet et conforme au programme
- De nombreux exercices et problèmes
- Tous les corrigés détaillés



DUNOD

Table des matières



1 Compléments d'algèbre	1
1. Relation d'équivalence sur un ensemble	1
2. Compléments sur les groupes	3
2.1 Groupe produit	3
2.2 Partie génératrice d'un groupe	4
3. Groupe monogène et groupe cyclique	7
3.1 Définitions	7
3.2 Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	8
3.3 Ordre d'un élément	12
3.4 Structure des groupes monogènes	15
4. Compléments sur les anneaux	15
4.1 Morphisme d'anneaux et anneau produit	16
4.2 Groupe des éléments inversibles	17
4.3 Idéal d'un anneau commutatif	17
4.4 Divisibilité dans un anneau intègre	19
5. Arithmétique de \mathbb{Z}	20
5.1 Idéaux et arithmétique de \mathbb{Z}	20
5.2 Anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	22
5.3 Utilisation de la notion de congruence et des anneaux quotients	25
6. Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$	31
6.1 Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$	31
6.2 Applications aux théorèmes de Bézout et Gauss	32
Exercices	35

2 Algèbre linéaire	41
1. Familles génératrices, familles libres et bases	41
1.1 Combinaisons linéaires	41
1.2 Familles génératrices, familles libres et bases	42
1.3 Détermination d'une application linéaire par sa valeur sur une base	44
2. Applications bilinéaires et structure d'algèbre	45
2.1 Applications bilinéaires	45
2.2 Algèbres	46
3. Somme et somme directe	50
3.1 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels	50
3.2 Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels	51
3.3 Décomposition en somme directe	52
4. Applications linéaires	55
4.1 Sous-espaces vectoriels stables	55
4.2 Isomorphisme associé à une application linéaire	58
4.3 Théorème du rang et codimension	59
4.4 Formes linéaires et hyperplans	61
Exercices	63
3 Applications linéaires et dualité en dimension finie	69
1. Matrices	69
1.1 Représentation matricielle des applications linéaires	69
1.2 Représentation matricielle des endomorphismes	71
1.3 Opérations élémentaires	78
2. Dual d'un espace vectoriel de dimension finie	83
2.1 Base duale	83
2.2 Formes linéaires et sous-espaces vectoriels vectoriels	85
2.3 Systèmes d'équations linéaires	86
Exercices	92
4 Réduction des endomorphismes	99
1. Polynômes d'endomorphisme	99
1.1 Morphisme d'évaluation	99
1.2 Idéal annulateur et polynôme minimal	101

1.3	Lemme des noyaux	105
2.	Éléments propres d'un endomorphisme	109
2.1	Vecteurs propres et valeurs propres	109
2.2	Indépendance des sous-espaces vectoriels propres	114
2.3	Polynôme caractéristique	115
2.4	Théorème de Hamilton-Cayley	122
3.	Endomorphismes diagonalisables	124
3.1	Définition et caractérisations élémentaires	124
3.2	Réduction des endomorphismes diagonalisables	129
3.3	Caractérisation par le polynôme minimal	131
4.	Endomorphismes trigonalisables	132
4.1	Définition	132
4.2	Caractérisation des endomorphismes trigonalisables	133
4.3	Applications	136
	Exercices	138
5	Séries numériques	145
1.	Critère de Cauchy	145
1.1	Rappels sur \mathbb{R}	145
1.2	Suites de Cauchy	146
2.	Suites et séries	147
2.1	Définitions	147
2.2	Propriétés immédiates, exemples	149
3.	Séries à termes réels positifs	150
3.1	Généralités	150
3.2	Théorèmes de comparaison	151
3.3	Utilisation d'une intégrale	155
3.4	Développement décimal d'un réel positif	157
4.	Séries réelles ou complexes	162
4.1	Convergence absolue	162
4.2	Sommation des relations de comparaison	164
4.3	Séries alternées	167
5.	Compléments	170
5.1	Sommation par tranches	170

TABLE DES MATIÈRES

5.2	Transformation d'Abel	172
6.	Séries doubles	174
6.1	Séries doubles réelles positives	176
6.2	Séries doubles complexes	180
6.3	Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes	184
	Exercices	186
6	Espaces vectoriels normés : définitions générales	193
1.	Norme et distance	193
1.1	Norme	193
1.2	Distance	197
1.3	Exemples classiques d'espaces vectoriels normés	202
2.	Suites et séries d'un espace vectoriel normé	206
2.1	Suites et séries convergentes	206
2.2	Valeurs d'adhérence	210
2.3	Relations de comparaison	210
3.	Topologie d'un espace vectoriel normé	212
3.1	Voisinages, ouverts et fermés	212
3.2	Intérieur, adhérence et frontière d'une partie	218
4.	Étude locale et continuité	222
4.1	Limite	222
4.2	Relations de comparaison	226
4.3	Continuité	227
4.4	Continuité uniforme	231
5.	Applications linéaires continues	231
5.1	Applications linéaires et bilinéaires continues	231
5.2	Norme subordonnée d'une application linéaire continue	235
	Exercices	239
7	Espaces vectoriels normés : théorèmes fondamentaux	245
1.	Compacité	245
1.1	Parties compactes d'un espace vectoriel normé	245
1.2	Propriétés fondamentales	248
1.3	Applications continues définies sur un compact	251
2.	Complétude	253

2.1	Suites de Cauchy d'un espace vectoriel normé	253
2.2	Parties complètes d'un espace vectoriel normé	256
2.3	Espaces de Banach	257
2.4	Séries d'un espace vectoriel normé complet	262
2.5	Applications à valeurs dans un espace vectoriel normé complet	266
3.	Connexité par arcs	268
3.1	Parties connexes par arcs	268
3.2	Parties connexes par arcs de \mathbb{R} et applications	270
4.	Espaces vectoriels normés de dimension finie	272
4.1	Propriétés des espaces numériques \mathbb{K}^p	272
4.2	Équivalence des normes	273
4.3	Utilisation des coordonnées	274
4.4	Théorème de Bolzano-Weierstrass	276
4.5	Parties compactes	277
4.6	Complétude	277
4.7	Espaces d'applications linéaires	278
	Exercices	281
8	Suites et séries de fonctions	287
1.	Espaces de fonctions classiques	287
1.1	Les fonctions continues par morceaux	287
1.2	Les fonctions en escalier	288
1.3	Les fonctions affines par morceaux	289
1.4	Les fonctions continues par morceaux 2π périodiques	289
2.	Suites de fonctions	290
2.1	Différents modes de convergence	290
2.2	Espace des applications bornées sur A	295
2.3	Conservation des propriétés par convergence uniforme	297
2.4	Intégration et dérivation d'une suite de fonctions numériques	299
3.	Théorèmes d'approximation	307
3.1	Les fonctions continues par morceaux	307
3.2	Les fonctions affines par morceaux	308
3.3	Théorème de Weierstrass	308
3.4	Théorème de Weierstrass trigonométrique	311

TABLE DES MATIÈRES

4.	Séries de fonctions	311
4.1	Différents modes de convergence	311
4.2	Convergence normale	315
4.3	Conservation des propriétés par convergence uniforme	317
4.4	Le cas des séries de fonctions numériques	319
	Exercices	323
9	Séries entières	331
1.	Généralités	331
1.1	Définition d'une série entière	331
1.2	Opérations sur les séries entières	332
2.	Convergence d'une série entière et fonction somme	332
2.1	Rayon de convergence d'une série entière	332
2.2	Convergence uniforme et séries entières	339
3.	Propriétés de la fonction somme d'une série entière	341
3.1	Continuité de la fonction somme	341
3.2	Intégration de la fonction somme	341
3.3	Dérivabilité de la fonction somme	342
3.4	Problèmes sur le bord	343
4.	Exponentielle complexe	346
4.1	Construction de l'exponentielle complexe et du nombre π	346
4.2	Séries entières réelles	352
5.	Fonctions développables en série entière	354
5.1	Cas des fractions rationnelles de la variable complexe	354
5.2	Cas des fonctions de la variable réelle	356
	Exercices	366
10	Fonctions vectorielles d'une variable réelle	373
1.	Intégration sur un segment	373
1.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	374
1.2	Propriétés de l'intégrale	375
1.3	Limites et intégrales	384
2.	Dérivation	385
2.1	Dérivée en un point	385
2.2	Caractérisation des fonctions constantes	387

2.3	Fonctions de classe C^1	388
2.4	Fonctions de classe C^k	391
3.	Primitives et intégrales	394
3.1	Primitives des fonctions continues	394
3.2	Théorème fondamental	394
3.3	Calcul d'intégrales	395
3.4	Inégalité des accroissements finis	397
4.	Formules de Taylor	400
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	400
4.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	401
4.3	Développements limités	401
4.4	Formule de Taylor-Young	402
5.	Dérivation d'une limite	402
5.1	Primitivation	402
5.2	Dérivation	403
5.3	Cas des séries	403
	Exercices	405
11	Intégration sur un intervalle quelconque	413
1.	Intégrabilité des fonctions à valeurs réelles positives	413
1.1	Définition	413
1.2	Conditions d'intégrabilité	417
1.3	Comparaison série-intégrale	421
2.	Intégrale des fonctions à valeurs vectorielles	425
2.1	Intégrabilité	425
2.2	Intégrale des fonctions sommables	427
2.3	Propriétés de l'intégrale	428
2.4	Calcul d'une intégrale	431
2.5	Intégration des relations de comparaison	435
2.6	Convergence en moyenne et en moyenne quadratique	439
3.	Théorèmes de convergence	444
3.1	Convergence uniforme	444
3.2	Convergence dominée	444
3.3	Intégration terme à terme d'une série de fonctions	447
4.	Intégrales dépendant d'un paramètre	451

TABLE DES MATIÈRES

4.1	Continuité sous le signe \int	451
4.2	Dérivation sous le signe \int	453
4.3	Un exemple : la fonction Γ	461
	Exercices	464
12	Intégrales doubles	473
1.	Intégrale double sur un rectangle	473
1.1	Théorème de Fubini	473
1.2	Cas des fonctions positives	475
1.3	Fonctions vectorielles	480
2.	Intégrale double sur un compact élémentaire	489
2.1	Fonction intégrable sur une partie bornée	489
2.2	Compacts élémentaires	491
2.3	Changement de variable	493
	Exercices	498
13	Espaces préhilbertiens	501
1.	Espaces préhilbertiens réels	501
1.1	Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques	501
1.2	Produit scalaire et norme d'un espace préhilbertien réel	508
1.3	Orthogonalité et orthogonalisation	512
1.4	Espaces euclidiens	515
1.5	Sous-espaces orthogonaux	516
2.	Espaces préhilbertiens complexes	523
2.1	Formes sesquilineaires hermitiennes définies positives	523
2.2	Produit scalaire et norme d'un espace préhilbertien complexe	528
2.3	Orthogonalité et orthogonalisation	532
2.4	Espaces hermitiens	535
2.5	Sous-espaces orthogonaux	536
	Exercices	542
14	Endomorphismes d'un espace euclidien	549
1.	Endomorphisme d'un espace euclidien	549
1.1	Adjoint d'un endomorphisme	549
1.2	Endomorphismes symétriques	552

1.3	Endomorphismes et formes bilinéaires symétriques	554
1.4	Endomorphismes orthogonaux	556
2.	Réduction des endomorphismes	563
2.1	Réduction des endomorphismes symétriques	563
2.2	Réduction d'une forme bilinéaire symétrique	566
2.3	Réduction des endomorphismes normaux	571
	Exercices	574
15	Séries de Fourier	581
1.	Espaces de fonctions périodiques	581
1.1	Fonctions périodiques	581
1.2	Produit scalaire et semi-normes usuelles	584
1.3	Fonctions exponentielles et polynômes trigonométriques	587
2.	Coefficients et sommes de Fourier	591
2.1	Coefficients et sommes partielles de Fourier	591
2.2	Interprétation géométrique	593
2.3	Propriétés des coefficients de Fourier	595
2.4	Coefficients de Fourier d'une fonction dérivée	597
2.5	Coefficients de Fourier de la somme d'une série trigonométrique convergeant uniformément	599
3.	Convergence ponctuelle	601
3.1	Théorème de convergence ponctuelle	601
3.2	Théorème de convergence normale	605
3.3	Théorème d'approximation de Weierstrass	607
4.	Convergence en moyenne quadratique	609
4.1	Espace des fonctions périodiques continues	609
4.2	Espace des fonctions périodiques continues par morceaux	613
4.3	Extensions aux fonctions T -périodiques	616
	Exercices	618
16	Fonctions de plusieurs variables réelles	627
1.	Dérivées partielles	627
1.1	Dérivée suivant un vecteur	627
1.2	Dérivée partielle	628
2.	Applications continûment différentiables	629

TABLE DES MATIÈRES

2.1	Application différentiable	629
2.2	Dérivées partielles d'une application différentiable	632
2.3	Applications continûment différentiables	634
2.4	Caractérisation par les dérivées partielles	636
2.5	Cas d'une application d'une variable réelle	638
2.6	Cas d'une application à valeurs réelles	638
3.	Propriétés des applications continûment différentiables	640
3.1	Applications à valeurs dans un produit	640
3.2	Composition	641
3.3	Propriétés linéaires	643
3.4	Produit bilinéaire	644
3.5	Formule des accroissements finis	646
3.6	Extremum local d'une application à valeurs réelles	649
4.	Applications k -fois continûment différentiables	651
4.1	Définition	651
4.2	Propriétés	651
4.3	Théorème de Schwarz	654
4.4	Formule de Taylor	658
4.5	Condition suffisante d'extremum local	660
5.	Difféomorphismes	662
5.1	Définition	662
5.2	Coordonnées polaires	666
	Exercices	672
17	Équations différentielles : cas linéaire	679
1.	Équations différentielles linéaires du premier ordre	679
1.1	Définitions et propriétés élémentaires	679
1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	683
1.3	Espace des solutions de l'équation homogène	688
1.4	Espace des solutions de l'équation complète	691
2.	Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants	693
2.1	Espace des solutions de l'équation homogène	694
2.2	Espace des solutions de l'équation complète	697
2.3	Méthodes pratiques de résolution	698

3.	Équations différentielles linéaires scalaires	704
3.1	Définitions	704
3.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	706
3.3	Espace des solutions de l'équation homogène	709
3.4	Espace des solutions de l'équation complète	717
3.5	Équations à coefficients constants	721
	Exercices	725
18	Équations différentielles : cas non linéaire	733
1.	Équations différentielles du premier ordre	733
1.1	Définitions	733
1.2	Théorèmes de Cauchy-Lipschitz	736
1.3	Exemples d'équations différentielles du premier ordre	741
2.	Systèmes différentiels autonomes d'ordre deux	745
2.1	Définitions	745
2.2	Théorèmes de Cauchy-Lipschitz	747
2.3	Étude géométrique des solutions maximales	750
2.4	Équations différentielles autonomes du second ordre	756
	Exercices	760
19	Courbes et surfaces	765
1.	Courbes	765
1.1	Arcs paramétrés	765
1.2	Étude locale	767
1.3	Théorème du relèvement	769
1.4	Étude métrique d'un arc	772
1.5	Courbes planes définie par une équation cartésienne	775
2.	Intégrales curvilignes	778
2.1	Champs de vecteurs et formes différentielles	778
2.2	Intégrale curviligne d'une forme différentielle	779
2.3	Formes exactes et fermées	783
2.4	Formule de Green-Riemann	787
3.	Courbes et surfaces de l'espace	790
3.1	Nappes paramétrées régulières	790

TABLE DES MATIÈRES

3.2 Surfaces définies par une équation 794

4. Quadriques 797

4.1 Classification des quadriques 798

4.2 Quadriques propres de rang trois 801

4.3 Quadriques propres de rang deux 804

4.4 Quadriques impropres 807

Exercices 809

Solutions 817

Index 1283

1.1 Définitions 144

1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz 145

1.3 Exemples d'équations différentielles du premier ordre 146

2.1 Définitions 150

2.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz 151

2.3 Étude géométrique des solutions maximales 152

2.4 Équations différentielles autonomes du second ordre 153

Exercices 154

1.2 Courbes et surfaces 172

1.1 Courbes 173

1.1 Arcs paramétrés 174

1.2 Étude locale 176

1.3 Théorème du relèvement 177

1.4 Étude métrique d'un arc 178

1.5 Courbes planes définies par une équation cartésienne 179

Intégrales curvilignes 180

2.1 Champs de vecteurs et formes différentielles 181

2.2 Intégrale curviligne d'une forme différentielle 182

2.3 Formes exactes et fermées 183

2.4 Formules de Green-Riemann 184

Courbes et surfaces de l'espace 185

3.1 Nappes paramétrées et géométrie différentielle 186

l'intégrale

MATHÉMATIQUES

TOUT-EN-UN

MP • MP*

Cet ouvrage tout-en-un propose aux étudiants de 2^e année MP, MP* un cours complet ainsi que de nombreux exercices et problèmes intégralement résolus.

Un cours complet et conforme au programme

- Toutes les notions sont abordées dans le strict respect des programmes.
- 19 chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie.

De nombreux exercices d'entraînement extraits des nouveaux concours

- Chaque chapitre propose un grand nombre d'exercices.
- Les énoncés sont extraits des derniers concours basés sur les nouveaux programmes.

Toutes les solutions détaillées

Les solutions détaillées de tous les exercices sont regroupées en fin d'ouvrage.

3^e édition

CLAUDE DESCHAMPS

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, est professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand.

ANDRÉ WARUSFEL

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de Mathématiques Spéciales MP* au lycée Louis-le-Grand et Inspecteur Général de Mathématiques.



9 782100 553396

6923601

ISBN 978-2-10-055339-6



DUNOD

www.dunod.com