

*Sous la direction de*  
**Jean-Pierre RAMIS**  
**André WARUSFEL**

Xavier BUFF • Josselin GARNIER  
Emmanuel HALBERSTADT • Thomas LACHAND-ROBERT  
François MOULIN • Jacques SAULOY

# Mathématiques

## Tout-en-un pour la Licence

### Niveau 1

2<sup>e</sup> édition

- Cours complet
- 700 exercices
- Bonus en ligne

RESSOURCES



NUMÉRIQUES

DUNOD

# Table des matières

## Préface

## Avant-propos

## I Notations et vocabulaire

### I.1 Fondements

1 Ensembles . . . . .	3
1.1 Appartenance, éléments . . . . .	4
1.2 Définition en compréhension . . . . .	7
1.3 Constructeurs . . . . .	8
2 Applications . . . . .	12
2.1 Applications et graphes . . . . .	12
2.2 Images et antécédents . . . . .	14
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de $E$ dans $F$ . . . . .	19
3 Suites et familles . . . . .	20
3.1 Suites d'éléments d'un ensemble . . . . .	20
3.2 Familles d'éléments d'un ensemble . . . . .	21
3.3 Familles d'ensembles . . . . .	22
3.4 Familles de parties d'un ensemble . . . . .	23
4 Lois de composition . . . . .	25
4.1 Vocabulaire général . . . . .	25
4.2 Application au calcul ensembliste . . . . .	28
5 Relations . . . . .	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble . . . . .	29
5.2 Relations d'équivalence . . . . .	32
5.3 Relations d'ordre . . . . .	34
6 Cardinaux . . . . .	38
6.1 Induction . . . . .	38
6.2 Équipotence . . . . .	40
6.3 Cardinaux finis et infinis . . . . .	43
7 Rudiments de logique . . . . .	45
7.1 Logique propositionnelle . . . . .	45
7.2 Prédicats et quantificateurs . . . . .	48
7.3 Théorèmes et démonstrations . . . . .	51
EXERCICES . . . . .	54

## II Algèbre

<b>II.1 Arithmétique</b>	<b>61</b>
1 Ensemble des entiers naturels . . . . .	62
1.1 Relations d'ordre et entiers naturels . . . . .	63
1.2 Récurrence . . . . .	63
1.3 Addition et multiplication des entiers naturels . . . . .	67
2 Dénombrément . . . . .	71
2.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables . . . . .	76
2.2 Analyse combinatoire . . . . .	81
3 Divisibilité . . . . .	81
3.1 Division euclidienne. Numération . . . . .	81
3.2 Nombres premiers. Factorisation des entiers . . . . .	84
3.3 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide . . . . .	88
4 Entiers relatifs . . . . .	92
4.1 Opérations sur les entiers relatifs . . . . .	92
4.2 Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ , divisibilité dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	96
5 Nombres rationnels . . . . .	100
EXERCICES . . . . .	106
<b>II.2 Groupes, anneaux, corps</b>	<b>113</b>
1 Lois de composition internes . . . . .	114
2 Groupes . . . . .	120
2.1 Définitions, règles de calcul . . . . .	120
2.2 Sous-groupes, morphismes de groupes . . . . .	122
2.3 Groupe symétrique . . . . .	128
2.4 Groupe additif des entiers modulo $n$ . . . . .	132
3 Anneaux . . . . .	134
3.1 Définitions, règles de calcul . . . . .	134
3.2 Sous-anneaux, idéaux, morphismes . . . . .	140
3.3 Divisibilité dans un anneau intègre . . . . .	145
3.4 Anneau des entiers modulo $n$ . . . . .	147
4 Corps . . . . .	152
EXERCICES . . . . .	156
<b>II.3 Espaces vectoriels et applications linéaires</b>	<b>163</b>
1 Vocabulaire et propriétés élémentaires . . . . .	164
1.1 La structure d'espace vectoriel . . . . .	164
1.2 Combinaisons linéaires . . . . .	167
1.3 Sous-espaces vectoriels . . . . .	170
2 Applications linéaires . . . . .	174
2.1 Vocabulaire et exemples . . . . .	174
2.2 Noyau et image . . . . .	179
2.3 Quelques applications linéaires particulières . . . . .	182
2.4 Espaces d'applications linéaires . . . . .	185
3 Familles de vecteurs . . . . .	187
3.1 Familles génératrices . . . . .	188
3.2 Familles libres . . . . .	190

3.3 Bases . . . . .	194
3.4 Dimension finie . . . . .	198
<b>4 Sommes directes et projections . . . . .</b>	<b>198</b>
4.1 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels . . . . .	198
4.2 Projections . . . . .	201
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>204</b>
<b>II.4 Calcul matriciel élémentaire . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>1 Algèbre matricielle . . . . .</b>	<b>212</b>
1.1 Définitions et généralités . . . . .	212
1.2 Matrices carrées . . . . .	220
1.3 Matrices et applications linéaires . . . . .	226
<b>2 Opérations élémentaires et algorithmes de Gauß . . . . .</b>	<b>230</b>
2.1 Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice . . . . .	230
2.2 Algorithmes de Gauß : lignes seules . . . . .	234
2.3 Algorithmes de Gauß : lignes et colonnes . . . . .	237
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>240</b>
<b>II.5 Le corps des nombres complexes . . . . .</b>	<b>245</b>
<b>1 Construction et axiomes . . . . .</b>	<b>246</b>
1.1 Approche axiomatique . . . . .	246
1.2 Construction effective de $\mathbb{C}$ . . . . .	247
<b>2 Règles élémentaires de calcul . . . . .</b>	<b>249</b>
2.1 Représentation cartésienne . . . . .	249
2.2 Le plan d'Argand-Cauchy . . . . .	251
2.3 Conjugaison . . . . .	253
2.4 Module . . . . .	254
2.5 Racines carrées . . . . .	258
<b>3 Représentation trigonométrique . . . . .</b>	<b>261</b>
3.1 Le groupe des nombres complexes de module 1 . . . . .	262
3.2 Racines de l'unité . . . . .	263
3.3 Arguments d'un nombre complexe . . . . .	266
3.4 Racines $n^{\text{èmes}}$ des nombres complexes . . . . .	269
3.5 Applications à la trigonométrie . . . . .	270
<b>4 Quelques applications géométriques . . . . .</b>	<b>272</b>
4.1 Similitudes planes . . . . .	272
4.2 Angles de vecteurs et angles de droites . . . . .	273
4.3 Constructions à la règle et au compas . . . . .	275
<b>5 Topologie de <math>\mathbb{C}</math> . . . . .</b>	<b>275</b>
5.1 Rappels sur la convergence dans $\mathbb{C}$ . . . . .	275
5.2 L'exponentielle complexe . . . . .	276
5.3 Le théorème de d'Alembert-Gauß . . . . .	278
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>280</b>
<b>II.6 Polynômes et fractions rationnelles . . . . .</b>	<b>285</b>
<b>1 Polynômes sur un corps quelconque . . . . .</b>	<b>286</b>
1.1 Construction et axiomes . . . . .	286
1.2 Règles élémentaires de calcul . . . . .	288
1.3 Propriétés arithmétiques des polynômes . . . . .	295

1.4 Fonctions polynomiales et racines d'un polynôme . . . . .	300
1.5 Polynômes dérivés . . . . .	305
<b>2 Polynômes sur les corps <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{C}</math></b> . . . . .	309
2.1 Applications du théorème de d'Alembert-Gauß . . . . .	310
2.2 Cyclotomie . . . . .	311
2.3 Polynômes de Tchebychef . . . . .	314
2.4 Nombres algébriques . . . . .	315
<b>3 Fractions et fonctions rationnelles</b> . . . . .	318
3.1 Le corps des fractions rationnelles . . . . .	318
3.2 Propriétés arithmétiques de $K(X)$ . . . . .	321
3.3 Fonctions rationnelles . . . . .	325
3.4 Développements limités . . . . .	326
<b>EXERCICES</b> . . . . .	327
<b>II.7 Espaces vectoriels de dimension finie</b> . . . . .	333
1 Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	334
1.1 Définition de la dimension . . . . .	334
1.2 Applications linéaires en dimension finie . . . . .	340
<b>2 Applications linéaires et matrices</b> . . . . .	344
2.1 Écriture matricielle d'une application linéaire . . . . .	344
2.2 Changements de bases . . . . .	350
<b>3 Déterminants</b> . . . . .	353
3.1 Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	354
3.2 Mineurs d'une matrice . . . . .	360
3.3 Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	366
3.4 Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	371
<b>4 Systèmes linéaires</b> . . . . .	377
4.1 Équations linéaires . . . . .	377
4.2 Systèmes linéaires . . . . .	379
<b>EXERCICES</b> . . . . .	385
<b>II.8 Initiation à l'algorithmique et au calcul formel</b> . . . . .	395
1 Exemple introductif : l'addition en base $b$ . . . . .	396
1.1 L'algorithme d'addition . . . . .	397
1.2 Analyse de l'algorithme d'addition . . . . .	402
<b>2 Vocabulaire</b> . . . . .	405
2.1 Langage algorithmique simplifié . . . . .	405
2.2 Des mathématiques aux algorithmes . . . . .	408
2.3 Un exemple détaillé : l'algorithme d'Euclide . . . . .	412
<b>3 Quelques exemples fondamentaux</b> . . . . .	415
3.1 L'exponentiation dichotomique . . . . .	415
3.2 Tris et permutations . . . . .	417
3.3 Polynômes . . . . .	422
<b>EXERCICES</b> . . . . .	425

### III Géométrie

2.2 Fonctions puissances . . . . .	603
Sous-espaces comparés des fonctions puissances, logarithme et exponentielle . . . . .	605
Applications continues . . . . .	606
<b>III.1 Géométrie dans les espaces affines</b> . . . . .	<b>431</b>
1 Espaces affines . . . . .	432
1.1 Structure d'espace affine . . . . .	432
1.2 Barycentres . . . . .	434
1.3 Sous-espaces affines . . . . .	435
1.4 Applications affines . . . . .	438
2 Représentation des sous-espaces affines . . . . .	442
2.1 Hyperplans . . . . .	442
2.2 Repère . . . . .	445
2.3 Systèmes d'équations . . . . .	446
3 Géométrie affine dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	447
3.1 Droites de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	448
3.2 Plans de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	451
3.3 Droites de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	455
3.4 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ . . . . .	458
4 Les coniques . . . . .	463
4.1 Cercles . . . . .	463
4.2 Coniques . . . . .	465
4.3 Équations de degré 2 . . . . .	469
<b>EXERCICES</b> . . . . .	<b>472</b>
<b>III.2 Courbes paramétrées</b> . . . . .	<b>477</b>
1 Courbes planes . . . . .	478
1.1 Notion de courbe paramétrée . . . . .	478
1.2 Étude locale . . . . .	479
1.3 Deux exemples . . . . .	488
2 Courbes en coordonnées polaires . . . . .	492
2.1 Définition . . . . .	492
2.2 Tangente . . . . .	493
2.3 Branches infinies . . . . .	495
3 Étude métrique d'une courbe plane . . . . .	495
3.1 Longueur d'une courbe . . . . .	495
3.2 Paramétrage normal . . . . .	497
3.3 Courbure . . . . .	500
3.4 Théorème fondamental . . . . .	505
4 Courbes de l'espace . . . . .	507
4.1 Tangente et plan osculateur . . . . .	508
4.2 Courbure, torsion . . . . .	510
4.3 Théorème fondamental . . . . .	512
<b>EXERCICES</b> . . . . .	<b>512</b>

## IV Analyse

<b>IV.1 Nombres réels, suites numériques</b>	<b>519</b>
1 Corps des nombres réels . . . . .	520
1.1 Bornes inférieures et supérieures . . . . .	520
1.2 Le corps des nombres réels . . . . .	522
1.3 Intervalles de $\mathbb{R}$ . . . . .	527
2 Suites numériques . . . . .	528
2.1 Généralités sur les suites . . . . .	528
2.2 Convergence d'une suite . . . . .	536
2.3 Cas des suites réelles . . . . .	546
2.4 Suites bornées . . . . .	550
2.5 Limites infinies . . . . .	551
3 Un exemple de construction de $\mathbb{R}$ . . . . .	554
3.1 Nombres décimaux . . . . .	554
3.2 Définition des nombres réels; relation d'ordre . . . . .	556
3.3 Théorème de la borne supérieure . . . . .	558
3.4 Opérations sur les réels . . . . .	560
EXERCICES . . . . .	562
<b>IV.2 Fonctions réelles</b>	<b>567</b>
1 Continuité . . . . .	568
1.1 Limite d'une fonction . . . . .	568
1.2 Théorème de la limite monotone . . . . .	570
1.3 Continuité . . . . .	571
1.4 Opérations sur les fonctions continues . . . . .	574
1.5 Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	574
1.6 Image continue d'un segment . . . . .	577
2 Dérivabilité . . . . .	578
2.1 Définition, exemples . . . . .	578
2.2 Opérations sur les dérivées . . . . .	580
2.3 Dérivées d'ordre $n$ . . . . .	582
2.4 Sens de variation et extrema . . . . .	584
2.5 Théorème de Rolle, accroissements finis . . . . .	585
2.6 Dérivée de la réciproque . . . . .	588
3 Étude d'une fonction . . . . .	589
3.1 Définition et variations . . . . .	589
3.2 Branches infinies . . . . .	590
EXERCICES . . . . .	592
<b>IV.3 Fonctions transcendantes</b>	<b>597</b>
1 Fonctions logarithme et exponentielle . . . . .	598
1.1 Logarithme népérien . . . . .	598
1.2 Exponentielle . . . . .	600
1.3 Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et exponentielle . . . . .	601
1.4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque . . . . .	601
2 Fonctions racines et puissances . . . . .	602
2.1 Fonctions racines . . . . .	602

2.2 Fonctions puissances . . . . .	603
2.3 Croissances comparées des fonctions puissances, logarithme et exponentielle . . . . .	605
<b>3 Fonctions trigonométriques . . . . .</b>	<b>606</b>
3.1 Fonctions sinus et cosinus . . . . .	606
3.2 Fonctions tangente et arc-tangente . . . . .	607
3.3 Arc-sinus et arc-cosinus . . . . .	609
<b>4 Trigonométrie hyperbolique . . . . .</b>	<b>611</b>
4.1 Sinus et cosinus hyperboliques . . . . .	611
4.2 Réciproques des fonctions hyperboliques . . . . .	613
<b>5 Dérivées des fonctions usuelles . . . . .</b>	<b>616</b>
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>616</b>
<b>IV.4 Séries numériques . . . . .</b>	<b>621</b>
<b>1 Convergence d'une série . . . . .</b>	<b>621</b>
1.1 Définitions . . . . .	621
1.2 Premiers résultats . . . . .	626
<b>2 Séries à termes réels positifs . . . . .</b>	<b>629</b>
2.1 Convergence par comparaison . . . . .	629
2.2 Utilisation d'une intégrale . . . . .	632
2.3 Application : développement d'un réel positif . . . . .	636
<b>3 Séries à termes réels ou complexes . . . . .</b>	<b>638</b>
3.1 Convergence absolue . . . . .	638
3.2 Séries alternées . . . . .	640
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>644</b>
<b>IV.5 Introduction à l'intégration . . . . .</b>	<b>649</b>
<b>1 Intégrale des fonctions en escalier . . . . .</b>	<b>650</b>
1.1 Subdivision d'un segment . . . . .	650
1.2 Fonctions en escalier . . . . .	651
1.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	652
1.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier . . . . .	653
<b>2 Fonctions continues par morceaux . . . . .</b>	<b>654</b>
2.1 Définition, exemples . . . . .	654
2.2 Approximation des fonctions continues par morceaux . . . . .	656
2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	657
<b>3 Propriétés de l'intégrale . . . . .</b>	<b>659</b>
3.1 Linéarité, relation de Chasles . . . . .	659
3.2 Inégalités . . . . .	660
3.3 Cas des fonctions continues . . . . .	662
3.4 Sommes de Riemann . . . . .	664
<b>4 Intégration et dérivation, calcul des intégrales . . . . .</b>	<b>666</b>
4.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle . . . . .	666
4.2 Le théorème fondamental de l'analyse . . . . .	668
<b>5 Calcul effectif d'intégrales . . . . .</b>	<b>670</b>
5.1 Intégration par parties . . . . .	671
5.2 Changement de variable . . . . .	673
5.3 Quel changement de variable choisir? . . . . .	675
5.4 Intégration des fractions rationnelles . . . . .	679
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>682</b>

<b>IV.6 Introduction aux fonctions vectorielles d'une variable réelle</b>	687
1 Suites vectorielles . . . . .	687
1.1 Distance entre deux vecteurs . . . . .	688
1.2 Convergence de suites . . . . .	690
1.3 Suites vectorielles définies par une récurrence linéaire . . . . .	693
1.4 Suites réelles définies par une récurrence d'ordre 2 . . . . .	696
2 Fonctions vectorielles . . . . .	697
2.1 Continuité . . . . .	697
2.2 Dérivabilité . . . . .	699
2.3 Opérations sur les dérivées . . . . .	700
2.4 Inégalité des accroissements finis . . . . .	702
2.5 Intégration . . . . .	704
3 Équations différentielles linéaires . . . . .	706
3.1 Équations scalaires d'ordre 1 . . . . .	706
3.2 Équations vectorielles d'ordre 1 . . . . .	710
3.3 Allure des solutions d'une équation homogène en dimension 2 . . . . .	715
3.4 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	719
EXERCICES . . . . .	724
<b>IV.7 Première initiation aux fonctions de plusieurs variables</b>	729
1 Continuité . . . . .	731
1.1 Ouverts, fermés et compacts . . . . .	731
1.2 Fonctions continues . . . . .	733
1.3 Théorème des bornes . . . . .	735
1.4 Norme d'une application linéaire . . . . .	736
2 Différentiabilité . . . . .	736
2.1 Dérivées partielles . . . . .	736
2.2 Dérivée suivant un vecteur . . . . .	739
2.3 Différentielle . . . . .	740
2.4 Matrice Jacobienne . . . . .	741
3 Propriétés fondamentales . . . . .	743
3.1 Opérations élémentaires . . . . .	743
3.2 Différentielle d'une application composée . . . . .	746
3.3 Applications continûment différentiables . . . . .	749
3.4 Théorème des accroissements finis . . . . .	750
4 Applications de la notion de différentiabilité . . . . .	752
4.1 Plan tangent au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	752
4.2 Dérivation sur $\mathbb{C}$ . . . . .	757
EXERCICES . . . . .	760
<b>IV.8 Approximation</b>	765
1 Introduction . . . . .	765
2 Formules de Taylor . . . . .	767
3 Extensions aux fonctions vectorielles . . . . .	770
4 Équivalents et notations de Landau . . . . .	770
4.1 Équivalents . . . . .	770
4.2 Notations de Landau . . . . .	774
5 Développements limités . . . . .	777
5.1 Détermination d'un développement limité . . . . .	779

5.2 Opérations sur les développements limités . . . . .	780
5.3 Développement limité à l'infini . . . . .	789
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>790</b>

## V Probabilités, statistiques

<b>V.1 Statistique élémentaire et probabilités finies</b>	<b>799</b>
<b>1 Introduction à la statistique descriptive . . . . .</b>	<b>800</b>
1.1 Données statistiques . . . . .	800
1.2 Représentation des données . . . . .	802
<b>2 Statistique descriptive univariée . . . . .</b>	<b>806</b>
2.1 Mesures de tendance centrale. . . . .	807
2.2 Mesures de dispersion . . . . .	809
<b>3 Statistique descriptive bivariée . . . . .</b>	<b>812</b>
3.1 Ajustement linéaire par moindre carrés . . . . .	814
3.2 Covariance et corrélation . . . . .	816
3.3 Corrélation et régression . . . . .	817
<b>4 Introduction aux probabilités . . . . .</b>	<b>819</b>
4.1 Expériences aléatoires, événements . . . . .	819
4.2 Espace de probabilité fini . . . . .	821
<b>5 Combinatoire . . . . .</b>	<b>825</b>
5.1 Généralités sur le dénombrement . . . . .	825
5.2 Dénombrements classiques . . . . .	827
5.3 Dénombrement appliqué au loto. . . . .	829
<b>6 Conditionnement et indépendance . . . . .</b>	<b>830</b>
6.1 Probabilité conditionnelle . . . . .	830
6.2 Probabilités composées, formule des probabilités totales . . . . .	832
6.3 Formule de Bayes . . . . .	834
6.4 Indépendance de deux événements. . . . .	835
6.5 Indépendance de familles d'événements . . . . .	838
<b>EXERCICES . . . . .</b>	<b>840</b>

Sous la direction de  
Jean-Pierre RAMIS, André WARUSFEL

## Mathématiques

### Tout-en-un pour la Licence ■ Niveau 1

Cet ouvrage de référence couvre, en un seul volume, l'ensemble du programme de mathématiques du niveau L1 des filières « Mathématiques », « Informatique » ou « Physique ». Il est composé de vingt modules regroupés en cinq thèmes : Notations et vocabulaire, Algèbre, Géométrie, Analyse et enfin Probabilités et statistique.

- **Chaque module peut être abordé de façon indépendante dans le cadre d'un parcours conseillé.**  
Cette présentation permet à l'étudiant, quel que soit son cursus, de s'initier à son rythme aux thèmes figurant à son programme et de conforter ses acquis. L'étudiant dispose des définitions précises et des énoncés et démonstrations des théorèmes essentiels.
- **280 exercices corrigés** illustrent le cours. Pour les étudiants souhaitant aller plus loin, **420 énoncés supplémentaires** sont proposés, les corrigés étant disponibles sur le site dunod.com, soit en tout **700 exercices** pour s'entraîner.

Cette nouvelle édition revue et corrigée tient compte des nouveaux programmes et améliore la progression du cours afin de mieux accompagner l'étudiant dans cette première année d'université.

2<sup>e</sup> édition

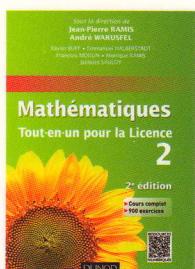
#### Jean-Pierre RAMIS

ancien élève de l'École normale supérieure de la rue de l'Ulm, membre de l'Institut (Académie des sciences), membre de l'Institut universitaire de France, professeur à l'Institut de mathématiques de Toulouse (université Paul Sabatier).

#### André WARUSFEL

ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de mathématiques.

Dans la même série :



6225148  
ISBN 978-2-10-059893-9

LICENCE   MASTER   DOCTORAT  
1 2 3 4 5 6 7 8

#### RESSOURCES



NUMÉRIQUES

