

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS
André WARUSFEL

Xavier BUFF ■ Josselin GARNIER
Emmanuel HALBERSTADT ■ Thomas LACHAND-ROBERT
François MOULIN ■ Jacques SAULOY

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence

Niveau 1

2^e édition

- ▶ Cours complet
- ▶ 700 exercices
- ▶ Bonus en ligne

RESSOURCES



NUMÉRIQUES

DUNOD

Table des matières

Préface	v
Avant-propos	xvii
I Notations et vocabulaire	
1.1 Fondements	3
1 Ensembles	4
1.1 Appartenance, éléments	4
1.2 Définition en compréhension	7
1.3 Constructeurs	8
2 Applications	12
2.1 Applications et graphes	12
2.2 Images et antécédents	14
2.3 L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F	19
3 Suites et familles	20
3.1 Suites d'éléments d'un ensemble	20
3.2 Familles d'éléments d'un ensemble	21
3.3 Familles d'ensembles	22
3.4 Familles de parties d'un ensemble	23
4 Lois de composition	25
4.1 Vocabulaire général	25
4.2 Application au calcul ensembliste	28
5 Relations	29
5.1 Relations binaires sur un ensemble	29
5.2 Relations d'équivalence	32
5.3 Relations d'ordre	34
6 Cardinaux	38
6.1 Induction	38
6.2 Équipotence	40
6.3 Cardinaux finis et infinis	43
7 Rudiments de logique	45
7.1 Logique propositionnelle	45
7.2 Prédicats et quantificateurs	48
7.3 Théorèmes et démonstrations	51
EXERCICES	54

II Algèbre

II.1 Arithmétique	61
1 Ensemble des entiers naturels	62
1.1 Relations d'ordre et entiers naturels	63
1.2 Récurrence	63
1.3 Addition et multiplication des entiers naturels	67
2 Dénombrement	71
2.1 Ensembles finis, ensembles dénombrables	71
2.2 Analyse combinatoire	76
3 Divisibilité	81
3.1 Division euclidienne. Numération	81
3.2 Nombres premiers. Factorisation des entiers	84
3.3 Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide	88
4 Entiers relatifs	92
4.1 Opérations sur les entiers relatifs	92
4.2 Sous-groupes de \mathbb{Z} , divisibilité dans \mathbb{Z}	96
5 Nombres rationnels	100
EXERCICES	106
II.2 Groupes, anneaux, corps	113
1 Lois de composition internes	114
2 Groupes	120
2.1 Définitions, règles de calcul	120
2.2 Sous-groupes, morphismes de groupes	122
2.3 Groupe symétrique	128
2.4 Groupe additif des entiers modulo n	132
3 Anneaux	134
3.1 Définitions, règles de calcul	134
3.2 Sous-anneaux, idéaux, morphismes	140
3.3 Divisibilité dans un anneau intègre	145
3.4 Anneau des entiers modulo n	147
4 Corps	152
EXERCICES	156
II.3 Espaces vectoriels et applications linéaires	163
1 Vocabulaire et propriétés élémentaires	164
1.1 La structure d'espace vectoriel	164
1.2 Combinaisons linéaires	167
1.3 Sous-espaces vectoriels	170
2 Applications linéaires	174
2.1 Vocabulaire et exemples	174
2.2 Noyau et image	179
2.3 Quelques applications linéaires particulières	182
2.4 Espaces d'applications linéaires	185
3 Familles de vecteurs	187
3.1 Familles génératrices	188
3.2 Familles libres	190

3.3 Bases	194
3.4 Dimension finie	198
4 Sommes directes et projections.	198
4.1 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels	198
4.2 Projections	201
EXERCICES	204
II.4 Calcul matriciel élémentaire	211
1 Algèbre matricielle.	212
1.1 Définitions et généralités	212
1.2 Matrices carrées	220
1.3 Matrices et applications linéaires	226
2 Opérations élémentaires et algorithmes de Gauß.	230
2.1 Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice	230
2.2 Algorithmes de Gauß : lignes seules	234
2.3 Algorithmes de Gauß : lignes et colonnes	237
EXERCICES	240
II.5 Le corps des nombres complexes	245
1 Construction et axiomes	246
1.1 Approche axiomatique	246
1.2 Construction effective de \mathbb{C}	247
2 Règles élémentaires de calcul	249
2.1 Représentation cartésienne.	249
2.2 Le plan d'Argand-Cauchy	251
2.3 Conjugaison	253
2.4 Module	254
2.5 Racines carrées	258
3 Représentation trigonométrique	261
3.1 Le groupe des nombres complexes de module 1	262
3.2 Racines de l'unité	263
3.3 Arguments d'un nombre complexe	266
3.4 Racines $n^{\text{èmes}}$ des nombres complexes	269
3.5 Applications à la trigonométrie	270
4 Quelques applications géométriques	272
4.1 Similitudes planes	272
4.2 Angles de vecteurs et angles de droites	273
4.3 Constructions à la règle et au compas	275
5 Topologie de \mathbb{C}	275
5.1 Rappels sur la convergence dans \mathbb{C}	275
5.2 L'exponentielle complexe	276
5.3 Le théorème de d'Alembert-Gauß	278
EXERCICES	280
II.6 Polynômes et fractions rationnelles	285
1 Polynômes sur un corps quelconque.	286
1.1 Construction et axiomes	286
1.2 Règles élémentaires de calcul	288
1.3 Propriétés arithmétiques des polynômes	295

1.4 Fonctions polynomiales et racines d'un polynôme	300
1.5 Polynômes dérivés	305
2 Polynômes sur les corps \mathbb{R} et \mathbb{C}	309
2.1 Applications du théorème de d'Alembert-Gauß	310
2.2 Cyclotomie	311
2.3 Polynômes de Tchebychef	314
2.4 Nombres algébriques	315
3 Fractions et fonctions rationnelles	318
3.1 Le corps des fractions rationnelles	318
3.2 Propriétés arithmétiques de $K(X)$	321
3.3 Fonctions rationnelles	325
3.4 Développements limités	326
EXERCICES	327
II.7 Espaces vectoriels de dimension finie	333
1 Espaces vectoriels de dimension finie	334
1.1 Définition de la dimension	334
1.2 Applications linéaires en dimension finie	340
2 Applications linéaires et matrices	344
2.1 Écriture matricielle d'une application linéaire	344
2.2 Changements de bases	350
3 Déterminants	353
3.1 Déterminant d'une matrice carrée	354
3.2 Mineurs d'une matrice	360
3.3 Déterminant d'un endomorphisme	366
3.4 Valeurs propres et vecteurs propres	371
4 Systèmes linéaires	377
4.1 Équations linéaires	377
4.2 Systèmes linéaires	379
EXERCICES	385
II.8 Initiation à l'algorithmique et au calcul formel	395
1 Exemple introductif : l'addition en base b	396
1.1 L'algorithme d'addition	397
1.2 Analyse de l'algorithme d'addition	402
2 Vocabulaire	405
2.1 Langage algorithmique simplifié	405
2.2 Des mathématiques aux algorithmes	408
2.3 Un exemple détaillé : l'algorithme d'Euclide	412
3 Quelques exemples fondamentaux	415
3.1 L'exponentiation dichotomique	415
3.2 Tris et permutations	417
3.3 Polynômes	422
EXERCICES	425

III Géométrie

III.1 Géométrie dans les espaces affines	431
1 Espaces affines	432
1.1 Structure d'espace affine	432
1.2 Barycentres	434
1.3 Sous-espaces affines	435
1.4 Applications affines	438
2 Représentation des sous-espaces affines	442
2.1 Hyperplans	442
2.2 Repère	445
2.3 Systèmes d'équations	446
3 Géométrie affine dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3	447
3.1 Droites de \mathbb{R}^2	448
3.2 Plans de \mathbb{R}^3	451
3.3 Droites de \mathbb{R}^3	455
3.4 Géométrie euclidienne dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3	458
4 Les coniques	463
4.1 Cercles	463
4.2 Coniques	465
4.3 Équations de degré 2	469
EXERCICES	472
III.2 Courbes paramétrées	477
1 Courbes planes	478
1.1 Notion de courbe paramétrée	478
1.2 Étude locale	479
1.3 Deux exemples	488
2 Courbes en coordonnées polaires	492
2.1 Définition	492
2.2 Tangente	493
2.3 Branches infinies	495
3 Étude métrique d'une courbe plane	495
3.1 Longueur d'une courbe	495
3.2 Paramétrage normal	497
3.3 Courbure	500
3.4 Théorème fondamental	505
4 Courbes de l'espace	507
4.1 Tangente et plan osculateur	508
4.2 Courbure, torsion	510
4.3 Théorème fondamental	512
EXERCICES	512

IV Analyse

IV.1 Nombres réels, suites numériques	519
1 Corps des nombres réels	520
1.1 Bornes inférieures et supérieures	520
1.2 Le corps des nombres réels	522
1.3 Intervalles de \mathbb{R}	527
2 Suites numériques	528
2.1 Généralités sur les suites	528
2.2 Convergence d'une suite	536
2.3 Cas des suites réelles	546
2.4 Suites bornées	550
2.5 Limites infinies	551
3 Un exemple de construction de \mathbb{R}	554
3.1 Nombres décimaux	554
3.2 Définition des nombres réels ; relation d'ordre	556
3.3 Théorème de la borne supérieure	558
3.4 Opérations sur les réels	560
EXERCICES	562
IV.2 Fonctions réelles	567
1 Continuité	568
1.1 Limite d'une fonction	568
1.2 Théorème de la limite monotone	570
1.3 Continuité	571
1.4 Opérations sur les fonctions continues	574
1.5 Théorème des valeurs intermédiaires	574
1.6 Image continue d'un segment	577
2 Dérivabilité	578
2.1 Définition, exemples	578
2.2 Opérations sur les dérivées	580
2.3 Dérivées d'ordre n	582
2.4 Sens de variation et extrema	584
2.5 Théorème de Rolle, accroissements finis	585
2.6 Dérivée de la réciproque	588
3 Étude d'une fonction	589
3.1 Définition et variations	589
3.2 Branches infinies	590
EXERCICES	592
IV.3 Fonctions transcendantes	597
1 Fonctions logarithme et exponentielle	598
1.1 Logarithme népérien	598
1.2 Exponentielle	600
1.3 Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et exponentielle	601
1.4 Logarithmes et exponentielles de base quelconque	601
2 Fonctions racines et puissances	602
2.1 Fonctions racines	602

2.2 Fonctions puissances	603
2.3 Croissances comparées des fonctions puissances, logarithme et exponentielle	605
3 Fonctions trigonométriques	606
3.1 Fonctions sinus et cosinus	606
3.2 Fonctions tangente et arc-tangente	607
3.3 Arc-sinus et arc-cosinus	609
4 Trigonométrie hyperbolique	611
4.1 Sinus et cosinus hyperboliques	611
4.2 Réciproques des fonctions hyperboliques	613
5 Dérivées des fonctions usuelles	616
EXERCICES	616
IV.4 Séries numériques	621
1 Convergence d'une série	621
1.1 Définitions	621
1.2 Premiers résultats	626
2 Séries à termes réels positifs	629
2.1 Convergence par comparaison	629
2.2 Utilisation d'une intégrale	632
2.3 Application : développement d'un réel positif	636
3 Séries à termes réels ou complexes	638
3.1 Convergence absolue	638
3.2 Séries alternées	640
EXERCICES	644
IV.5 Introduction à l'intégration	649
1 Intégrale des fonctions en escalier	650
1.1 Subdivision d'un segment	650
1.2 Fonctions en escalier	651
1.3 Intégrale d'une fonction en escalier	652
1.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier	653
2 Fonctions continues par morceaux	654
2.1 Définition, exemples	654
2.2 Approximation des fonctions continues par morceaux	656
2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux	657
3 Propriétés de l'intégrale	659
3.1 Linéarité, relation de Chasles	659
3.2 Inégalités	660
3.3 Cas des fonctions continues	662
3.4 Sommes de Riemann	664
4 Intégration et dérivation, calcul des intégrales	666
4.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle	666
4.2 Le théorème fondamental de l'analyse	668
5 Calcul effectif d'intégrales	670
5.1 Intégration par parties	671
5.2 Changement de variable	673
5.3 Quel changement de variable choisir ?	675
5.4 Intégration des fractions rationnelles	679
EXERCICES	682

IV.6 Introduction aux fonctions vectorielles d'une variable réelle	687
1 Suites vectorielles	687
1.1 Distance entre deux vecteurs	688
1.2 Convergence de suites	690
1.3 Suites vectorielles définies par une récurrence linéaire	693
1.4 Suites réelles définies par une récurrence d'ordre 2	696
2 Fonctions vectorielles	697
2.1 Continuité	697
2.2 Dérivabilité	699
2.3 Opérations sur les dérivées	700
2.4 Inégalité des accroissements finis	702
2.5 Intégration	704
3 Équations différentielles linéaires	706
3.1 Équations scalaires d'ordre 1	706
3.2 Équations vectorielles d'ordre 1	710
3.3 Allure des solutions d'une équation homogène en dimension 2	715
3.4 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants	719
EXERCICES	724
IV.7 Première initiation aux fonctions de plusieurs variables	729
1 Continuité	731
1.1 Ouverts, fermés et compacts	731
1.2 Fonctions continues	733
1.3 Théorème des bornes	735
1.4 Norme d'une application linéaire	736
2 Différentiabilité	736
2.1 Dérivées partielles	736
2.2 Dérivée suivant un vecteur	739
2.3 Différentielle	740
2.4 Matrice Jacobienne	741
3 Propriétés fondamentales	743
3.1 Opérations élémentaires	743
3.2 Différentielle d'une application composée	746
3.3 Applications continûment différentiables	749
3.4 Théorème des accroissements finis	750
4 Applications de la notion de différentiabilité	752
4.1 Plan tangent au graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	752
4.2 Dérivation sur \mathbb{C}	757
EXERCICES	760
IV.8 Approximation	765
1 Introduction	765
2 Formules de Taylor	767
3 Extensions aux fonctions vectorielles	770
4 Équivalents et notations de Landau	770
4.1 Équivalents	770
4.2 Notations de Landau	774
5 Développements limités	777
5.1 Détermination d'un développement limité	779

5.2 Opérations sur les développements limités	780
5.3 Développement limité à l'infini	789
EXERCICES	790

V Probabilités, statistiques

V.1 Statistique élémentaire et probabilités finies	799
1 Introduction à la statistique descriptive	800
1.1 Données statistiques	800
1.2 Représentation des données	802
2 Statistique descriptive univariée	806
2.1 Mesures de tendance centrale	807
2.2 Mesures de dispersion	809
3 Statistique descriptive bivariée	812
3.1 Ajustement linéaire par moindres carrés	814
3.2 Covariance et corrélation	816
3.3 Corrélation et régression	817
4 Introduction aux probabilités	819
4.1 Expériences aléatoires, événements	819
4.2 Espace de probabilité fini	821
5 Combinatoire	825
5.1 Généralités sur le dénombrement	825
5.2 Dénombrements classiques	827
5.3 Dénombrement appliqué au loto	829
6 Conditionnement et indépendance	830
6.1 Probabilité conditionnelle	830
6.2 Probabilités composées, formule des probabilités totales	832
6.3 Formule de Bayes	834
6.4 Indépendance de deux événements	835
6.5 Indépendance de familles d'événements	838
EXERCICES	840

Sous la direction de
Jean-Pierre RAMIS, André WARUSFEL

Mathématiques

Tout-en-un pour la Licence ■ Niveau 1

Cet ouvrage de référence couvre, en un seul volume, l'ensemble du programme de mathématiques du niveau L1 des filières « Mathématiques », « Informatique » ou « Physique ». Il est composé de vingt modules regroupés en cinq thèmes : Notations et vocabulaire, Algèbre, Géométrie, Analyse et enfin Probabilités et statistique.

- **Chaque module peut être abordé de façon indépendante dans le cadre d'un parcours conseillé.** Cette présentation permet à l'étudiant, quel que soit son cursus, de s'initier à son rythme aux thèmes figurant à son programme et de conforter ses acquis. L'étudiant dispose des définitions précises et des énoncés et démonstrations des théorèmes essentiels.
- **280 exercices corrigés** illustrent le cours. Pour les étudiants souhaitant aller plus loin, **420 énoncés supplémentaires** sont proposés, les corrigés étant disponibles sur le site dunod.com, soit en tout **700 exercices** pour s'entraîner.

Cette nouvelle édition revue et corrigée tient compte des nouveaux programmes et améliore la progression du cours afin de mieux accompagner l'étudiant dans cette première année d'université.

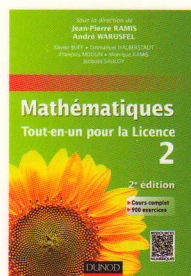
Jean-Pierre RAMIS

ancien élève de l'École normale supérieure de la rue de l'Ulm, membre de l'Institut (Académie des sciences), membre de l'Institut universitaire de France, professeur à l'Institut de mathématiques de Toulouse (université Paul Sabatier).

André WARUSFEL

ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, a été professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand à Paris et inspecteur général de mathématiques.

Dans la même série :



9 782100 598939

6225148
ISBN 978-2-10-059893-9



RESSOURCES



NUMÉRIQUES

