

*l'intègre*

**VISA POUR  
LA PRÉPA**

**MPSI | PCSI | PTSI | BCPST | ECS**

G. CONNAN

# Maths

## Visa pour la prépa

**CONFORME  
À LA RÉFORME**

Un manuel complet pour réussir  
son entrée en prépa

Tout le cours du lycée à maîtriser

Une introduction à l'informatique

Des QCM et des exercices

Tous les corrigés détaillés

**DUNOD**

# Table des matières

## 1. Savez-vous calculer ? 1

- 1.1 De l'importance de savoir calculer 1
- 1.2 Formulaire de trigonométrie 1
- 1.3 Nombres complexes 2
- 1.4 Dérivation : la Foire Aux Questions 11
- 1.5 Exercices 21

## 2. Savez-vous intégrer ? 73

- 2.1 Mise en place d'une définition 73
- 2.2 Quelles sont les fonctions intégrables ? 77
- 2.3 Propriétés de l'intégrale 79
- 2.4 Valeur moyenne 80
- 2.5 Primitive et intégrale 82
- 2.6 Exercices 84

## 3. Savez-vous raisonner ? 95

- 3.1 Test préliminaire 95
- 3.2 Contexte 95
- 3.3 Syntaxe 96

3.4	Sémantique	98
3.5	Approche formelle de la logique propositionnelle	102
3.6	Récurrence	106
3.7	Exercices	107

## 4. Savez-vous prévoir ? 117

4.1	Rappels de théorie des ensembles	117
4.2	Une dose d'algèbre générale	118
4.3	Quelques résultats sur les cardinaux	120
4.4	Dénombrement	121
4.5	Triangle de pascal – Binôme de Newton	123
4.6	Probabilités ?	124
4.7	Avant la formalisation	124
4.8	Espace probabilisable – Espace probabilisé	126
4.9	Probabilités conditionnelles	128
4.10	Variables aléatoires finies	131
4.11	Quelques lois discrètes classiques	137
4.12	Exercices	139

## 5. Savez-vous programmer ? 163

5.1	Scilab	163
5.2	Python	176
5.3	Exercices	190

## 1.1 De l'importance de savoir calculer...

On dispose certes d'ordinateurs pour effectuer les calculs (et nous verrons comment le faire) mais avant, méditez cette pensée d'Alain CONNES, membre de l'Académie des sciences, Professeur au Collège de France, à l'I.H.E.S. et à l'Université de Vanderbilt aux États-Unis. Il a de plus reçu la Médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du C.N.R.S. en 2004.

*Quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.*

Alain CONNES – Sciences et imaginaire

## 1.2 Formulaire de trigonométrie

### Formules

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ , pour  $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ , pour  $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

### Transformation de produits en somme

- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a + b) + \cos(a - b))$
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a - b) - \cos(a + b))$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a + b) + \sin(a - b))$

### Transformation de sommes en produits

- $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

### Formules de duplication

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ,  $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$

Avec  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , on a :

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

## 1.3 Nombres complexes

### Vocabulaire et premières propriétés

#### Théorème Ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble  $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de  $\mathbb{R}$
- contenant un nombre  $i$  vérifiant  $i^2 = -1$
- tel que chaque élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

#### Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel  $z$ .

Le nombre  $a$  est appelé **partie réelle** de  $z$  et notée  $\Re(z)$ .

Le nombre  $b$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$  et notée  $\Im(z)$ .

#### Remarque

$\Im(z)$  est un nombre réel.

#### Remarque : À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat  $2x + 3y - 5 + i(7x - 32y + 1) = 0$  avec  $x$  et  $y$  des réels. Et bien le membre de gauche est une **forme algébrique** puisque de la forme réel  $+ i \cdot$  réel. Or la forme algébrique de 0 est  $0 + i \cdot 0$ .

# Maths Visa pour la prépa

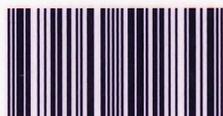
Vous souhaitez préparer votre entrée en prépa ? Vous êtes en prépa et vous pensez avoir des lacunes sur le programme du lycée ? Ce manuel vous aidera à maîtriser tous les pré-requis en mathématiques.

**Un cours qui fait la synthèse des notions du lycée requises en prépa**  
**Pour vous aider à bien démarrer votre année**, l'ouvrage revisite le programme du lycée sous un angle nouveau et pédagogique.  
**Organisé sous forme de compétences**, il présente les notions et méthodes incontournables pour réussir.  
**Pour vous accompagner pendant le premier semestre de prépa**, le cours aborde « en douceur » les premières notions du programme, notamment une introduction à l'informatique.

### Un entraînement complet

- **Des tests de connaissances** pour évaluer votre niveau.
- **Des exercices à difficulté progressive** pour vous entraîner.
- **Tous les corrigés détaillés.**

### Dans la même collection :



9 782100 592845

6987424

ISBN 978-2-10-059284-5

**GUILLAUME CONNAN**  
 Professeur agrégé  
 de mathématiques à  
 l'IUT d'informatique  
 de Nantes,  
 colleur en classes  
 préparatoires.



**DUNOD**

dunod.com