

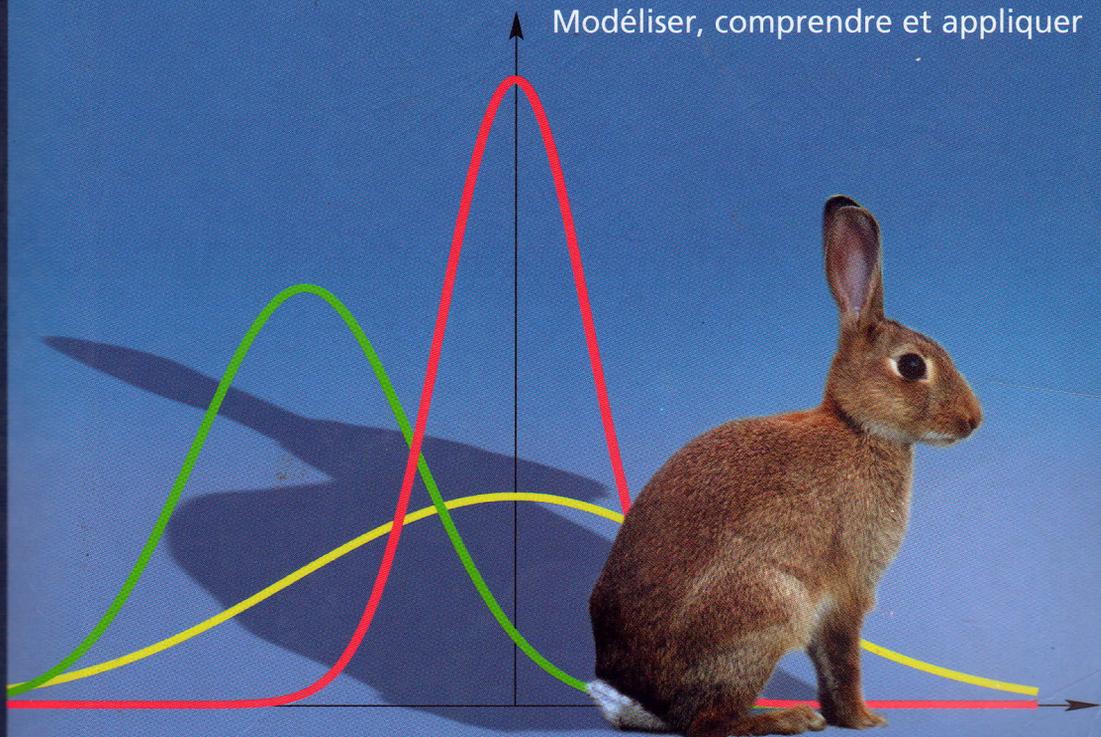
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP // // // Mathématiques

Gérard Biau, Jérôme Droniou et Marc Herzlich

L1-L3

# Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature

Modéliser, comprendre et appliquer



# TABLE DES MATIÈRES

	Étude de fonctions . . . . .	17	
	Évolution d'un pathogène : une solution dépend . . . . .	18	
	Modèles de croissance . . . . .	18	
	Premier exemple : à un linéaire . . . . .	18	
	Second exemple : à non linéaire . . . . .	18	
	Caractéristiques . . . . .	19	
	Multiplications d'indices . . . . .	19	
	Intégrales et primitives . . . . .	19	
	Exercices . . . . .	19	
	Variations . . . . .	19	
	Fonctions de plusieurs variables . . . . .	19	
	Problème : étude théorique d'un gaz parfait . . . . .	19	
	Définitions générales . . . . .	19	
	Préliminaires : l'espace à dimensions . . . . .	19	
	Fonctions de plusieurs variables . . . . .	19	
	Représentations graphiques sur les graphes . . . . .	19	
	Fonctions partielles . . . . .	19	
	Dérivées partielles . . . . .	19	
	Définition . . . . .	19	
	Variations d'extréma . . . . .	19	
	Notation différentielle et formes différentielles . . . . .	19	
	Dérivée directionnelle et différentielle . . . . .	19	
	Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	19	
	Intégration le long d'un chemin . . . . .	19	
	Intégrale d'une forme différentielle . . . . .	19	
	Formules fondamentales de la dérivation . . . . .	19	
	Formes exactes et fermées . . . . .	19	
	Étude théorique d'un gaz parfait . . . . .	19	
	Exercices . . . . .	19	
	Probabilités . . . . .	19	
	Problème . . . . .	19	
	Notion de limite . . . . .	19	
	Règles de calcul de limites . . . . .	19	
	Fonctions continues . . . . .	19	
	Définition et propriétés . . . . .	19	
	Valeurs intermédiaires . . . . .	19	
	Extrema . . . . .	19	
	Bijection réciproque . . . . .	19	
	Dérivabilité . . . . .	19	
	Définition et règles de calcul . . . . .	19	
	Dérivée et sens de variation . . . . .	19	
	Dérivée et extrema . . . . .	19	

**Avant-Propos**

**I Bases**

**1 Fonctions d'une variable**

1.7	Étude de fonctions . . . . .	30
1.8	Évolution d'un pathogène : une solution . . . . .	34
1.8.1	Vous avez dit modélisation ? . . . . .	34
1.8.2	Premier exemple : $\beta$ sur-linéaire . . . . .	36
1.8.3	Second exemple : $\beta$ sous-linéaire . . . . .	38
1.9	Annexe . . . . .	39
1.9.1	Notations usuelles . . . . .	39
1.9.2	Manipulations d'inégalités . . . . .	40
1.9.3	Intégrales et primitives . . . . .	41
1.10	Exercices . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Fonctions de plusieurs variables</b> . . . . .	<b>49</b>
2.1	Problème : étude thermodynamique d'un gaz . . . . .	49
2.2	Définitions générales . . . . .	50
2.2.1	Préliminaire : l'espace à $n$ dimensions . . . . .	50
2.2.2	Fonctions de plusieurs variables . . . . .	52
2.2.3	Représentations graphiques, surfaces-graphe . . . . .	54
2.2.4	Fonctions partielles . . . . .	55
2.3	Dérivées partielles . . . . .	57
2.3.1	Définition . . . . .	57
2.3.2	Variations et extrema . . . . .	59
2.3.3	Notation différentielle et formes différentielles . . . . .	62
2.3.4	Dérivée directionnelle et fonctions composées . . . . .	64
2.3.5	Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	66
2.4	Intégration le long d'un chemin . . . . .	67
2.4.1	Intégrale d'une forme différentielle . . . . .	68
2.4.2	Formule fondamentale du calcul différentiel . . . . .	70
2.5	Formes exactes et fermées . . . . .	72
2.6	Étude thermodynamique d'un gaz : une solution . . . . .	74
2.7	Exercices . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Probabilités</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Problème : évaluation d'un risque de trisomie 21 . . . . .	79
3.2	Modélisation des phénomènes aléatoires . . . . .	80
3.2.1	L'univers (des possibles) . . . . .	80
3.2.2	Événements . . . . .	81
3.2.3	Probabilité . . . . .	82
3.2.4	Analyse combinatoire . . . . .	85
3.2.5	Probabilités conditionnelles, indépendance d'événements . . . . .	87

3.2.6	Formule de Bayes	90
3.2.7	Indépendance	91
3.3	Évaluation d'un risque de trisomie 21 : une solution	93
3.4	Variables aléatoires	94
3.4.1	Variables discrètes	97
3.4.2	Variables continues	99
3.5	Caractéristiques des variables aléatoires	103
3.5.1	Fonction de répartition	103
3.5.2	Espérance	105
3.5.3	Variance	109
3.5.4	Indépendance entre variables aléatoires	111
3.6	Quelques exemples de lois classiques	112
3.6.1	Loi de Bernoulli	112
3.6.2	Loi binomiale	113
3.6.3	Loi de Poisson	114
3.6.4	Loi exponentielle	115
3.6.5	Loi normale	116
3.6.6	Trois lois utiles en statistique	118
3.7	Exercices	122
<b>4</b>	<b>Des probabilités aux statistiques</b>	<b>127</b>
4.1	Problème : obésité chez les enfants	127
4.2	L'échantillonnage	129
4.2.1	Individus et population	129
4.2.2	L'échantillon aléatoire	130
4.3	Moyenne et variance empiriques	132
4.3.1	Moyenne empirique	132
4.3.2	Variance empirique	133
4.4	Distributions théorique et empirique	135
4.5	Fonction de répartition empirique	141
4.5.1	Définition	141
4.5.2	Quantiles et quantiles empiriques	144
4.6	Obésité chez les enfants : une solution	149
4.7	Annexe : loi des grands nombres et théorème central limite	152
4.7.1	Loi des grands nombres	152
4.7.2	Théorème central limite	155
4.8	Exercices	157

<b>II</b>	<b>Statistique</b>	<b>161</b>
<b>5</b>	<b>Estimation ponctuelle et par intervalle</b>	<b>163</b>
5.1	Problème : estimation d'un taux de germination . . . . .	163
5.2	Estimation ponctuelle . . . . .	164
5.2.1	Principes généraux . . . . .	164
5.2.2	Moyenne et variance empiriques . . . . .	165
5.3	Intervalles de confiance . . . . .	169
5.3.1	Définition et principe de construction . . . . .	169
5.3.2	Estimation par intervalle de la moyenne à variance connue . . . . .	171
5.3.3	Estimation par intervalle de la moyenne à variance inconnue . . . . .	175
5.3.4	Estimation par intervalle de la variance : le cas gaussien . . . . .	178
5.4	Estimation d'un taux de germination : une solution . . . . .	181
5.4.1	Estimation d'une proportion . . . . .	181
5.4.2	Application au problème du pépiniériste . . . . .	184
5.5	Estimation de la différence de deux moyennes . . . . .	184
5.5.1	Échantillons indépendants . . . . .	185
5.5.2	Échantillons appariés . . . . .	190
5.6	Exercices . . . . .	192
<b>6</b>	<b>Tests d'hypothèses</b>	<b>197</b>
6.1	Problème : croisement génétique . . . . .	197
6.2	Notions générales sur les tests statistiques . . . . .	199
6.3	Test de la moyenne dans un échantillon gaussien . . . . .	203
6.4	Étude de la puissance d'un test de moyenne . . . . .	213
6.5	Croisement génétique : une solution . . . . .	216
6.6	Comparaison de deux moyennes . . . . .	218
6.6.1	Échantillons indépendants . . . . .	219
6.6.2	Échantillons appariés . . . . .	224
6.7	Tests du $\chi^2$ . . . . .	225
6.7.1	Test du $\chi^2$ d'ajustement . . . . .	226
6.7.2	Test du $\chi^2$ d'indépendance . . . . .	230
6.7.3	Test du $\chi^2$ d'homogénéité . . . . .	233
6.8	Exercices . . . . .	236

<b>7</b>	<b>Régression</b>	<b>243</b>
7.1	Problème : taux de croissance d'une population	243
7.2	Régression linéaire simple	245
7.2.1	Le modèle linéaire	245
7.2.2	Ajustement	247
7.2.3	Généralisations	252
7.3	Qualité de l'ajustement linéaire	254
7.3.1	Coefficient de détermination	254
7.3.2	Corrélation	256
7.3.3	Corrélation et covariance	259
7.4	Intervalles de confiance, tests et prévision	261
7.4.1	Intervalles de confiance	261
7.4.2	Tests de signification des coefficients de régression	265
7.4.3	Prévision	266
7.5	Taux de croissance d'une population : une solution	269
7.6	Analyse de variance à un facteur	275
7.6.1	Données et modèle	275
7.6.2	Test de Fisher	276
7.6.3	Estimation des effets	281
7.6.4	Comparaisons multiples de moyennes	285
7.6.5	Quelques remarques terminales	287
7.7	Exercices	287
<b>III</b>	<b>Systèmes dynamiques</b>	<b>291</b>
<b>8</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>293</b>
8.1	Problème : modélisation d'une population de parasites	293
8.1.1	Motivation	293
8.1.2	Bilans	294
8.1.3	Qu'est-ce qu'une équation différentielle?	297
8.2	Équations différentielles linéaires	298
8.2.1	Forme des équations différentielles linéaires	298
8.2.2	Résolution des équations différentielles linéaires	299
8.2.3	Comment trouver une solution particulière?	301
8.3	Équations à variables séparées	303
8.3.1	Forme des équations différentielles à variables séparées	304
8.3.2	Résolution des équations à variables séparées	304
8.4	Un mot sur la condition initiale	307

8.5	Commentaire sur la résolution des équations différentielles en général . . . . .	309
8.6	Modélisation d'une population de parasites : une solution . . . . .	309
8.6.1	Les œufs . . . . .	310
8.6.2	Les larves . . . . .	311
8.7	Exercices . . . . .	313
<b>9</b>	<b>Calcul matriciel et applications</b>	<b>317</b>
9.1	Problème : croissance d'une population . . . . .	317
9.2	Matrices . . . . .	319
9.2.1	Addition de matrices . . . . .	321
9.2.2	Multiplication de matrices . . . . .	322
9.3	Systèmes linéaires . . . . .	325
9.3.1	Deux équations et deux inconnues . . . . .	325
9.3.2	Cas général . . . . .	328
9.3.3	Matrice inverse . . . . .	329
9.4	Applications linéaires . . . . .	331
9.4.1	Définitions . . . . .	331
9.4.2	Changement de repère . . . . .	332
9.4.3	Changements de repère et applications linéaires . . . . .	336
9.5	Diagonalisation . . . . .	337
9.5.1	Valeurs propres, vecteurs propres . . . . .	338
9.5.2	Diagonalisation en pratique . . . . .	340
9.6	Croissance d'une population : une solution . . . . .	344
9.7	Annexe : la méthode du pivot . . . . .	348
9.8	Exercices . . . . .	357
<b>10</b>	<b>Équations différentielles couplées et systèmes dynamiques</b>	<b>361</b>
10.1	Problème : concentration d'un composé injecté dans le sang . . . . .	361
10.1.1	Phénomène à temps discret ou à temps continu ? . . . . .	361
10.1.2	Systèmes couplés d'équations différentielles . . . . .	362
10.2	Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	363
10.2.1	Existence et unicité des solutions . . . . .	366
10.2.2	Résolution pratique . . . . .	367
10.3	Concentration d'un composé injecté dans le sang : une solution . . . . .	375
10.4	Sur l'allure des solutions lorsque $n = 2$ . . . . .	378
10.4.1	Informations qualitatives . . . . .	380
10.4.2	Interprétation géométrique . . . . .	380

10.5	Quelques exemples de dynamiques non linéaires en dimension 2 . . . . .	384
10.5.1	Problème : proies et prédateurs . . . . .	384
10.5.2	Systèmes dynamiques . . . . .	386
10.5.3	Portraits de phase . . . . .	387
10.5.4	Courbes isoclines et points d'équilibre . . . . .	390
10.5.5	Proies et prédateurs : une solution . . . . .	394
10.5.6	Stabilité des équilibres . . . . .	398
10.6	Exercices . . . . .	401
<b>IV</b>	<b>Solutions des exercices</b>	<b>407</b>
<b>11</b>	<b>Solutions de la partie I : Bases</b>	<b>409</b>
11.1	Solutions des exercices du chapitre 1 . . . . .	409
11.2	Solutions des exercices du chapitre 2 . . . . .	419
11.3	Solutions des exercices du chapitre 3 . . . . .	422
11.4	Solutions des exercices du chapitre 4 . . . . .	432
<b>12</b>	<b>Solutions de la partie II : Statistique</b>	<b>445</b>
12.1	Solutions des exercices du chapitre 5 . . . . .	445
12.2	Solutions des exercices du chapitre 6 . . . . .	457
12.3	Solutions des exercices du chapitre 7 . . . . .	479
<b>13</b>	<b>Solutions de la partie III : Systèmes dynamiques</b>	<b>491</b>
13.1	Solutions des exercices du chapitre 8 . . . . .	491
13.2	Solutions des exercices du chapitre 9 . . . . .	499
13.3	Solutions des exercices du chapitre 10 . . . . .	510
	<b>Bibliographie</b>	<b>525</b>
	<b>Index</b>	<b>527</b>

Quel est cet ouvrage ?  
 Nous ne voulions pas non plus d'un intermédiaire maladroit qui sacrifierait tout à tout, selon les chapitres et les notions abordés, l'exigence de rigueur ou les objectifs pédagogiques. Nous avons donc fait le pari qu'il était possible d'écrire un livre d'un niveau mathématique homogène, nourri des applications et ouvert à l'utilisateur (plutôt qu'au concepteur) des mathématiques.

Les trois maîtres mots de cet ouvrage sont : modéliser, comprendre, maîtriser. La modélisation est un élément essentiel de la démarche scientifique, et permet de passer des résultats d'expériences ou d'un recueil d'événements à une

# Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature

Modéliser, comprendre et appliquer

Gérard Biau, Jérôme Droniou et Marc Herzlich

Ce livre présente un choix de concepts et d'outils pouvant constituer le programme de mathématiques des trois premières années d'études universitaires en sciences de la nature ou de la vie. Plus généralement, l'ouvrage s'adresse à tout lecteur curieux de découvrir une présentation précise, mais sans excès de théorie, des concepts mathématiques indispensables à la modélisation des phénomènes naturels.

La première partie est consacrée à l'étude des fonctions (à une ou plusieurs variables), au calcul des probabilités et aux liens entre probabilités et statistique. La deuxième traite de thèmes statistiques plus élaborés (estimations, tests d'hypothèses, régression). Enfin, la troisième partie est dédiée aux équations différentielles et à l'algèbre linéaire. Chaque chapitre insiste sur la nécessité de savoir *modéliser, comprendre et appliquer*. De nombreux exercices (avec solutions) permettent de compléter l'exposé et d'ouvrir vers davantage d'applications.

*Gérard Biau est Professeur à l'Université Paris 6, après avoir été Professeur à l'Université Montpellier 2. Jérôme Droniou et Marc Herzlich sont Professeurs à l'Université Montpellier 2. Ils ont tous trois participé à la mise en place d'enseignements de mathématiques, pour les licences de sciences de la nature et de la vie, centrés sur la démarche de modélisation et les applications des mathématiques. Leurs thèmes de recherche respectifs sont la statistique non paramétrique et l'apprentissage statistique, l'étude théorique et numérique des équations aux dérivées partielles et la géométrie différentielle.*

COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP // // // Mathématiques



ISBN : 978-2-7598-0481-8

45 euros

[www.edpsciences.org](http://www.edpsciences.org)

