

l'intégrale

Julien Freslon
Jérôme Poineau
Daniel Fredon
Claude Morin

Mathématiques

Exercices incontournables MP

- Les exercices incontournables du programme
- Les méthodes de résolution étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Les corrigés détaillés

DUNOD

Table des matières

1	Algèbre générale	3
	Exercice 1.1 : Résolution d'un système	3
	Exercice 1.2 : Configuration géométrique	3
	Exercice 1.3 : Utilisation d'une base non canonique de $\mathbb{R}_n[X]$	5
	Exercice 1.4 : Dés pipés et polynômes	6
	Exercice 1.5 : Retrouver la fraction rationnelle	7
	Exercice 1.6 : Groupe engendré par deux éléments	7
	Exercice 1.7 : Radical d'un idéal	8
	Exercice 1.8 : Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	10
	Exercice 1.9 : Une congruence	12
	Exercice 1.10 : Calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	13
	Exercice 1.11 : Lemme chinois et application	15
	Exercice 1.12 : Nombres de Fermat	16
	Exercice 1.13 : Une propriété du groupe symétrique	17
	Exercice 1.14 : Système de générateurs du groupe orthogonal	17
2	Algèbre linéaire	21
	Exercice 2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes	21
	Exercice 2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions	25
	Exercice 2.3 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes	28
	Exercice 2.4 : Diagonalisation	31
	Exercice 2.5 : Réduction	35
	Exercice 2.6 : Réduction d'une matrice d'ordre 3	38
	Exercice 2.7 : Trigonalisation	42
	Exercice 2.8 : Réduction d'une matrice à paramètres	46
	Exercice 2.9 : Diagonalisation simultanée	48
	Exercice 2.10 : Réduction des matrices de trace nulle	50
	Exercice 2.11 : Formes linéaires et base antéduale	53
	Exercice 2.12 : Formes linéaires et hyperplans	56
	Exercice 2.13 : Théorème de Cayley-Hamilton	60
	Exercice 2.14 : Décomposition de Dunford	66
3	Algèbre bilinéaire	75
	Exercice 3.1 : Noyaux, images et adjoint	75
	Exercice 3.2 : Exemple de matrice définie positive	77
	Exercice 3.3 : Construction de matrices positives	79

Exercice 3.4 :	Endomorphisme normal	80
Exercice 3.5 :	Une inégalité sur le déterminant d'une matrice symétrique	83
Exercice 3.6 :	Racine carrée d'une matrice définie positive	86
Exercice 3.7 :	Décomposition polaire	88
Exercice 3.8 :	Congruence simultanée et inégalités sur les déterminants	89
4	Espaces vectoriels normés	93
Exercice 4.1 :	Réunion et intersection de boules	93
Exercice 4.2 :	Boule unité	94
Exercice 4.3 :	Comparaison de normes	94
Exercice 4.4 :	Normes équivalentes	96
Exercice 4.5 :	Partie dense dans un ensemble de matrices	98
Exercice 4.6 :	Partie dense dans un ensemble de polynômes	99
Exercice 4.7 :	Fonction continue	100
Exercice 4.8 :	Application linéaire non continue	100
Exercice 4.9 :	Fonction uniformément continue	101
Exercice 4.10 :	Applications linéaires non continues	102
Exercice 4.11 :	Norme subordonnée	104
Exercice 4.12 :	Compacité du groupe des matrices orthogonales	105
Exercice 4.13 :	Un fermé borné non compact	106
Exercice 4.14 :	Somme d'un compact et d'un fermé	106
Exercice 4.15 :	Suites de Cauchy	107
Exercice 4.16 :	Espaces complets	109
5	Séries numériques	111
Exercice 5.1 :	Nature de séries	111
Exercice 5.2 :	Nature de séries II	116
Exercice 5.3 :	Quelques calculs explicites de sommes de séries	122
Exercice 5.4 :	Formule de Stirling	127
Exercice 5.5 :	Séparation des termes pairs et impairs	130
Exercice 5.6 :	Convergence et développement asymptotique	133
Exercice 5.7 :	Un critère de convergence	135
Exercice 5.8 :	Convergence et monotonie	139
Exercice 5.9 :	Équivalents et restes de séries	142
Exercice 5.10 :	Convergence de série et intégrabilité	151
Exercice 5.11 :	Transformation d'Abel	159
Exercice 5.12 :	Produits infinis	163
6	Suites et séries de fonctions	167
Exercice 6.1 :	Convergence uniforme d'une suite de fonctions I	167
Exercice 6.2 :	Convergence uniforme d'une suite de fonctions II	169
Exercice 6.3 :	Convergence uniforme d'une série de fonctions	171
Exercice 6.4 :	Fonction ζ de Riemann	174
Exercice 6.5 :	Régularité d'une série de fonctions	180
Exercice 6.6 :	Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions	183
Exercice 6.7 :	Intégration et convergence uniforme	188

7	Intégration	195
	Exercice 7.1 : Un calcul d'intégrale I	195
	Exercice 7.2 : Un calcul d'intégrale II	198
	Exercice 7.3 : Changement de variable	202
	Exercice 7.4 : Calcul d'une intégrale à paramètre	203
	Exercice 7.5 : Fonction Γ d'Euler	208
	Exercice 7.6 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet	211
	Exercice 7.7 : Transformée de Laplace du sinus cardinal	217
	Exercice 7.8 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet	218
	Exercice 7.9 : Une formule d'Euler	224
	Exercice 7.10 : Intégrale de Gauss	233
	Exercice 7.11 : Théorème de d'Alembert-Gauss	238
8	Séries de Fourier	245
	Exercice 8.1 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier I	247
	Exercice 8.2 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier II	250
	Exercice 8.3 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier III	253
	Exercice 8.4 : Relation de récurrence sur les coefficients de Fourier	258
	Exercice 8.5 : Expression d'une intégrale sous forme de série	261
	Exercice 8.6 : Inégalité de Wirtinger	263
9	Séries entières	273
	Exercice 9.1 : Calculs de sommes de séries numériques	273
	Exercice 9.2 : Calculs de rayons de convergence avec la règle de d'Alembert	274
	Exercice 9.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition	275
	Exercice 9.4 : Domaine de convergence	277
	Exercice 9.5 : Convergence et calcul de la somme	278
	Exercice 9.6 : Développement d'une fonction en série entière	279
	Exercice 9.7 : Avec une suite récurrente linéaire	281
	Exercice 9.8 : Convergence radiale	282
	Exercice 9.9 : Dénombrement	284
	Exercice 9.10 : Détermination d'une somme	286
	Exercice 9.11 : Conditions de continuité	287
	Exercice 9.12 : Un équivalent de la somme	290
	Exercice 9.13 : Limite du quotient de deux sommes	291
	Exercice 9.14 : Calcul de la somme d'une série numérique	292
10	Équations différentielles	295
	Exercice 10.1 : Variation de la constante ou des constantes ?	295
	Exercice 10.2 : Utilisation d'une solution « évidente »	297
	Exercice 10.3 : Utilisation d'un changement de variable	299
	Exercice 10.4 : Utilisation de séries entières (cas régulier)	300
	Exercice 10.5 : Utilisation de séries entières (cas singulier)	302
	Exercice 10.6 : Système différentiel d'ordre 2	305
	Exercice 10.7 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)	309
	Exercice 10.8 : Utilisation du Wronskien	312
	Exercice 10.9 : Équation différentielle autonome	314

11 Fonctions de plusieurs variables	317
Exercice 11.1 : Continuité d'une fonction	317
Exercice 11.2 : À propos du théorème de Schwarz	318
Exercice 11.3 : Différentiabilité d'une fonction	319
Exercice 11.4 : Une équation aux dérivées partielles	320
Exercice 11.5 : Équation des cordes vibrantes	321
Exercice 11.6 : Dérivée directionnelle	323
Exercice 11.7 : Étude d'une suite	324
Exercice 11.8 : Recherche d'extremums	326
Exercice 11.9 : Extremums sur un compact	328
Exercice 11.10 : Extremums sur un compact d'une fonction de n variables	329
Exercice 11.11 : Majoration	330
Exercice 11.12 : D'un extremum local à un extremum global	331
Exercice 11.13 : Détermination d'un facteur intégrant d'une forme différentielle	334
Exercice 11.14 : Calcul d'une intégrale curviligne	336
12 Courbes et surfaces	339
Exercice 12.1 : Droites tangentes et normales	339
Exercice 12.2 : Plans tangents à une surface	340
Exercice 12.3 : Intersection d'un cône et d'un plan	342
Exercice 12.4 : Équation d'un cylindre	343
Exercice 12.5 : Étude d'une quadrique	345
Exercice 12.6 : Variations sur les normes usuelles du plan	347
Exercice 12.7 : Surface engendrée par rotation	350
Exercice 12.8 : Quadrique dépendant d'un paramètre	352
Exercice 12.9 : Détermination d'un cône	353
Exercice 12.10 : Intersection d'une quadrique avec un plan et projection	355
Index	359

l'intégrale

Mathématiques

Exercices incontournables

MP

Vous avez besoin d'accompagnement pour appliquer votre cours de mathématiques ? Vous voulez être à l'aise face à tout exercice ?

La clé de la réussite est de bien maîtriser les exercices incontournables du programme.

Cet ouvrage va vous faire découvrir ces exercices et vous dévoiler leurs méthodes de résolution.

Pour chaque exercice, vous trouverez :

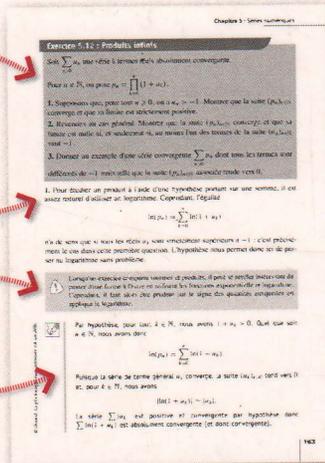
- La méthode de résolution expliquée et commentée étape par étape,
- Le corrigé détaillé rédigé,
- Les astuces à retenir et les pièges à éviter.

L'énoncé

La méthode de résolution
étape par étape

Des astuces à retenir
ou des pièges à éviter

Le corrigé
détaillé rédigé



9 782100 534296

6686901

ISBN 978-2-10-053429-6

JULIEN FRESLON

polytechnicien,
professeur agrégé de
mathématiques en
classe préparatoire au
lycée Dessaignes de
Blois

JÉRÔME POINEAU

polytechnicien, agrégé
de mathématiques,
maître de conférences
à l'université de
Strasbourg

DANIEL FREDON

ancien maître
de conférences à
l'université de Limoges
et interrogateur en
classes préparatoires
aux lycées Gay-Lussac et
Turgot de Limoges.

CLAUDE MORIN

professeur de
mathématiques en PC*
au lycée Gay-Lussac de
Limoges.



DUNOD

www.dunod.com