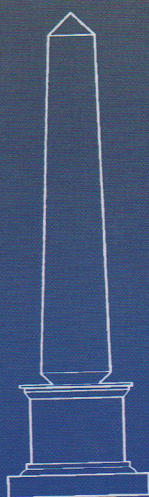


Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Modèles aléatoires

Applications aux sciences
de l'ingénieur et du vivant



Springer



Table des matières

partie I Modèles discrets

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Chaînes de Markov à temps discret | 3 |
| 1.1 | Définition et propriétés | 4 |
| 1.2 | Chaîne trace, états absorbants | 8 |
| 1.3 | Probabilités invariantes, réversibilité | 10 |
| 1.4 | Chaînes irréductibles, chaînes apériodiques | 11 |
| 1.5 | Théorème ergodique | 12 |
| 1.6 | Théorème central limite | 23 |
| | Références | 29 |
| 2 | Recuit simulé | 31 |
| 2.1 | Condition de Doeblin et convergence des chaînes de Markov | 33 |
| 2.2 | Algorithme de Metropolis | 35 |
| 2.3 | Le recuit simulé | 37 |
| 2.3.1 | Mesures de Gibbs | 37 |
| 2.3.2 | Un résultat partiel | 40 |
| 2.3.3 | Résultats théoriques | 44 |
| 2.4 | Le problème du voyageur de commerce | 45 |
| | Références | 50 |
| 3 | Gestion des approvisionnements | 51 |
| 3.1 | Le modèle probabiliste de gestion de stock | 52 |
| 3.1.1 | Le modèle à une période de temps | 52 |
| 3.1.2 | Le modèle dynamique de gestion de stock | 57 |
| 3.2 | Éléments de contrôle de chaînes de Markov | 58 |
| 3.2.1 | Description du modèle | 58 |
| 3.2.2 | Évaluation du coût associé à une stratégie | 60 |
| 3.2.3 | Équations d'optimalité | 62 |
| 3.2.4 | Application au recrutement : le problème de la secrétaire | 66 |

XII Table des matières

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Résolution du problème dynamique de gestion de stock | 71 |
| 3.3.1 | Gestion sans coût fixe d'approvisionnement | 72 |
| 3.3.2 | Gestion avec coût fixe | 74 |
| 3.3.3 | Délai de livraison | 80 |
| 3.4 | Conclusion | 84 |
| | Références | 84 |
| 4 | Le processus de Galton-Watson | 87 |
| 4.1 | Étude du phénomène d'extinction | 89 |
| 4.1.1 | Caractérisation de la probabilité d'extinction η | 92 |
| 4.1.2 | Vitesse d'extinction | 94 |
| 4.2 | Lois limites | 97 |
| 4.2.1 | Le cas surcritique | 98 |
| 4.2.2 | Le cas sous-critique | 101 |
| 4.2.3 | Le cas critique | 105 |
| 4.3 | Réduction de variance dans les cas sous-critique ou critique ... | 108 |
| 4.4 | Loi de la population totale | 111 |
| | Références | 119 |
| 5 | Recherche de zones homogènes dans l'ADN | 121 |
| 5.1 | Chaînes de Markov cachées | 123 |
| 5.2 | L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) | 125 |
| 5.2.1 | Définitions et exemples | 125 |
| 5.2.2 | Convergence de l'EMV dans un modèle simple | 129 |
| 5.3 | Présentation générale de l'algorithme EM | 132 |
| 5.4 | Mise en œuvre de l'algorithme EM | 135 |
| 5.4.1 | L'étape espérance : étape E | 135 |
| 5.4.2 | L'étape maximisation : étape M | 142 |
| 5.5 | Convergence de l'EMV pour les chaînes de Markov cachées ... | 143 |
| 5.6 | Autres exemples d'application de l'algorithme EM | 151 |
| 5.6.1 | Le mélange | 151 |
| 5.6.2 | Données censurées | 156 |
| 5.7 | Conclusion | 158 |
| | Références | 160 |
| 6 | Séquences exceptionnelles dans l'ADN | 163 |
| 6.1 | Fluctuations du nombre d'occurrences d'un mot | 165 |
| 6.2 | Une autre approche asymptotique | 171 |
| 6.3 | Une troisième approche asymptotique | 179 |
| 6.3.1 | « Loi des petits nombres » ou loi de Poisson | 179 |
| 6.3.2 | « Loi des petits nombres » pour le nombre d'occurrences | 181 |
| 6.4 | Un autre modèle pour la séquence d'ADN | 186 |
| 6.5 | Conclusion | 189 |
| | Références | 194 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 7 | Estimation du taux de mutation de l'ADN | 195 |
| 7.1 | Le modèle d'évolution de population | 196 |
| 7.2 | Étude de l'arbre phylogénique | 197 |
| 7.2.1 | Temps d'apparition de l'ancêtre de deux individus | 197 |
| 7.2.2 | Temps d'apparition de l'ancêtre de r individus | 199 |
| 7.2.3 | Processus de Kingman et commentaires | 203 |
| 7.3 | Le modèle de Wright-Fisher | 203 |
| 7.4 | Modélisation des mutations | 206 |
| 7.4.1 | Estimation du taux de mutation I | 208 |
| 7.4.2 | Estimation du taux de mutation II | 212 |
| 7.4.3 | Conclusion sur l'estimation du taux de mutation | 216 |
| | Références | 216 |

partie II Modèles continus

| | | |
|----------|---|-----|
| 8 | Chaînes de Markov à temps continu | 221 |
| 8.1 | Construction des chaînes de Markov à temps continu | 222 |
| 8.1.1 | Construction | 222 |
| 8.1.2 | Propriété de Markov | 224 |
| 8.2 | Semi-groupe, générateur infinitésimal | 226 |
| 8.3 | Comportement asymptotique | 230 |
| 8.4 | Processus de Poisson | 235 |
| | Références | 237 |
| 9 | Files d'attente | 239 |
| 9.1 | Introduction | 240 |
| 9.1.1 | Modélisation des files d'attente | 240 |
| 9.1.2 | Présentation des files $M/M/K$ | 241 |
| 9.2 | Étude des files à un serveur : $M/M/1$ | 243 |
| 9.2.1 | Probabilité invariante | 243 |
| 9.2.2 | Temps passé dans la file d'attente : client virtuel | 246 |
| 9.2.3 | Temps passé dans la file d'attente : client réel | 247 |
| 9.3 | Étude des files à K serveurs : $M/M/K$ | 251 |
| 9.3.1 | Probabilité invariante | 251 |
| 9.3.2 | Temps passé dans la file d'attente : client virtuel | 253 |
| 9.4 | Réseaux de Jackson | 257 |
| 9.4.1 | Modèle et propriétés | 257 |
| 9.4.2 | Files en tandem, processus de sortie | 261 |
| 9.5 | Explosion et récurrence des files $M/GI/1$ | 262 |
| | Références | 264 |

XIV Table des matières

| | | |
|-----------|--|-----|
| 10 | Éléments de fiabilité | 265 |
| 10.1 | Introduction à la fiabilité | 266 |
| 10.1.1 | Mesures de performance | 266 |
| 10.1.2 | Taux de défaillance | 267 |
| 10.1.3 | Taux de défaillance monotone, lois NBU | 270 |
| 10.2 | Simulation | 274 |
| 10.2.1 | Inversion du taux de défaillance cumulé | 274 |
| 10.2.2 | Méthode des pannes fictives | 275 |
| 10.3 | Étude de stratégies de maintenance | 277 |
| 10.3.1 | Éléments de renouvellement | 278 |
| 10.3.2 | Remplacement suivant l'âge | 282 |
| 10.3.3 | Remplacement préventif par bloc | 285 |
| 10.3.4 | Comparaisons entre les remplacements suivant l'âge et par bloc | 288 |
| 10.3.5 | Durées entre pannes non identiquement distribuées | 292 |
| 10.4 | Éléments de fiabilité des systèmes complexes | 295 |
| 10.4.1 | Fonction de structure, coupes | 295 |
| 10.4.2 | Calcul de la disponibilité | 297 |
| 10.4.3 | Facteurs d'importance | 299 |
| | Références | 300 |
| 11 | Lois de valeurs extrêmes | 303 |
| 11.1 | Statistique d'ordre, estimation des quantiles | 307 |
| 11.2 | Exemples de convergence du maximum renormalisé | 316 |
| 11.3 | Limites des maximums renormalisés | 320 |
| 11.4 | Domaines d'attraction | 325 |
| 11.4.1 | Caractérisations générales | 325 |
| 11.4.2 | Domaines d'attraction des lois de Fréchet et Weibull | 327 |
| 11.5 | Estimation du paramètre de la loi de valeurs extrêmes | 329 |
| 11.5.1 | Estimateur de Pickand | 329 |
| 11.5.2 | Estimateur de Hill | 332 |
| 11.6 | Estimation des quantiles extrêmes | 336 |
| 11.6.1 | À l'aide de l'estimateur de Pickand | 337 |
| 11.6.2 | À l'aide de l'estimateur de Hill | 340 |
| 11.7 | Conclusion | 340 |
| | Références | 341 |
| 12 | Processus de coagulation et fragmentation | 343 |
| 12.1 | Équations de coagulation discrètes | 344 |
| 12.1.1 | Définition et propriétés des solutions | 344 |
| 12.1.2 | Solutions explicites pour les noyaux constant, additif et multiplicatif | 348 |
| 12.2 | Coagulation et fragmentation discrètes | 365 |
| 12.3 | Chaînes de Markov à temps continu associées | 367 |
| 12.3.1 | Le processus de Marcus-Lushnikov | 368 |

| | |
|---|-----|
| 12.3.2 Le processus de transfert de masse | 375 |
| Références | 383 |

partie III Appendice

| | |
|---|------------|
| A Rappels de probabilités | 387 |
| A.1 Variables aléatoires | 387 |
| A.1.1 Espace de probabilité | 387 |
| A.1.2 Variables aléatoires | 388 |
| A.1.3 Espérance | 388 |
| A.1.4 Convergence des espérances | 390 |
| A.1.5 Indépendance | 391 |
| A.1.6 Variance | 391 |
| A.1.7 Fonction caractéristique | 392 |
| A.1.8 Transformée de Laplace | 393 |
| A.1.9 Probabilités conditionnelles | 393 |
| A.2 Lois usuelles | 394 |
| A.2.1 Lois discrètes usuelles | 394 |
| A.2.2 Lois à densité usuelles | 396 |
| A.2.3 Simulation | 398 |
| A.3 Convergence et théorèmes limites | 400 |
| A.3.1 Convergence de variables aléatoires | 400 |
| A.3.2 Loi forte des grands nombres | 402 |
| A.3.3 Théorème central limite | 402 |
| A.3.4 Intervalles de confiance | 403 |
| Références | 405 |
| B Une variante du théorème central limite | 407 |
| C Fonction de répartition et quantile | 411 |
| D Convergence en variation sur un espace discret | 415 |
| E Étude d'une équation différentielle ordinaire | 417 |
| Références | 421 |
| Index | 429 |

La collection Mathématiques & Applications, créée par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), édite des cours avancés de Master et d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Les sujets abordés couvrent aussi bien les domaines classiques des mathématiques appliquées (analyse numérique et équations aux dérivées partielles, probabilités et statistiques, recherche opérationnelle...) que des applications plus spécifiques (en sciences naturelles et physiques, économie, informatique, traitement du signal...). Certains ouvrages ont ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres peuvent constituer des textes de référence.

The series Mathématiques & Applications was founded by the "Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles" (SMAI) with the purpose of publishing graduate-level textbooks in applied mathematics. It is mainly addressed to graduate students, but researchers and engineers will often find here advanced introductions to current research and to recent results in various branches of applied mathematics. The subjects cover classical fields in applied mathematics (numerical analysis and partial differential equations, probabilities and statistics, operations research...) as well as more specific applications (to the natural and physical sciences, economics, computer science, signal processing...). While some books are simple textbooks, others can also serve as references.

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Modèles aléatoires

Ce tome présente des modèles aléatoires élémentaires (chaînes de Markov à temps discret et continu, lois de valeurs extrêmes) et certaines de leurs applications courantes : algorithmes d'optimisation, gestion des approvisionnements, dimensionnement de files d'attente, fiabilité et dimensionnement d'ouvrages. Des problématiques plus récentes sont également abordées : recherche de séquences exceptionnelles et de zones homogènes de l'ADN, estimation du taux de mutation de l'ADN, phénomènes de coagulation de molécules de polymères ou d'aérosols.

Ce tome s'adresse à un public très large d'étudiants et d'enseignants. Le pré requis pour sa lecture est la maîtrise du contenu d'un cours d'initiation aux probabilités.

