

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Modèles aléatoires

Applications aux sciences
de l'ingénieur et du vivant



Springer

SMAI'

Table des matières

partie I Modèles discrets

1 Chaînes de Markov à temps discret	3
1.1 Définition et propriétés	4
1.2 Chaîne trace, états absorbants	8
1.3 Probabilités invariantes, réversibilité	10
1.4 Chaînes irréductibles, chaînes apériodiques.....	11
1.5 Théorème ergodique	12
1.6 Théorème central limite	23
Références	29
2 Recuit simulé	31
2.1 Condition de Doeblin et convergence des chaînes de Markov ..	33
2.2 Algorithme de Metropolis	35
2.3 Le recuit simulé	37
2.3.1 Mesures de Gibbs	37
2.3.2 Un résultat partiel.....	40
2.3.3 Résultats théoriques	44
2.4 Le problème du voyageur de commerce	45
Références	50
3 Gestion des approvisionnements	51
3.1 Le modèle probabiliste de gestion de stock	52
3.1.1 Le modèle à une période de temps	52
3.1.2 Le modèle dynamique de gestion de stock	57
3.2 Éléments de contrôle de chaînes de Markov	58
3.2.1 Description du modèle	58
3.2.2 Évaluation du coût associé à une stratégie	60
3.2.3 Équations d'optimalité	62
3.2.4 Application au recrutement : le problème de la secrétaire	66

XII Table des matières

3.3	Résolution du problème dynamique de gestion de stock	71
3.3.1	Gestion sans coût fixe d'approvisionnement	72
3.3.2	Gestion avec coût fixe	74
3.3.3	Délai de livraison	80
3.4	Conclusion	84
	Références	84
4	Le processus de Galton-Watson	87
4.1	Étude du phénomène d'extinction	89
4.1.1	Caractérisation de la probabilité d'extinction η	92
4.1.2	Vitesse d'extinction	94
4.2	Lois limites	97
4.2.1	Le cas surcritique	98
4.2.2	Le cas sous-critique	101
4.2.3	Le cas critique	105
4.3	Réduction de variance dans les cas sous-critique ou critique ..	108
4.4	Loi de la population totale	111
	Références	119
5	Recherche de zones homogènes dans l'ADN	121
5.1	Chaînes de Markov cachées	123
5.2	L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)	125
5.2.1	Définitions et exemples	125
5.2.2	Convergence de l'EMV dans un modèle simple	129
5.3	Présentation générale de l'algorithme EM	132
5.4	Mise en œuvre de l'algorithme EM	135
5.4.1	L'étape espérance : étape E	135
5.4.2	L'étape maximisation : étape M	142
5.5	Convergence de l'EMV pour les chaînes de Markov cachées ..	143
5.6	Autres exemples d'application de l'algorithme EM	151
5.6.1	Le mélange	151
5.6.2	Données censurées	156
5.7	Conclusion	158
	Références	160
6	Séquences exceptionnelles dans l'ADN	163
6.1	Fluctuations du nombre d'occurrences d'un mot	165
6.2	Une autre approche asymptotique	171
6.3	Une troisième approche asymptotique	179
6.3.1	« Loi des petits nombres » ou loi de Poisson	179
6.3.2	« Loi des petits nombres » pour le nombre d'occurrences	181
6.4	Un autre modèle pour la séquence d'ADN	186
6.5	Conclusion	189
	Références	194

Table des matières XIII

7 Estimation du taux de mutation de l'ADN	195
7.1 Le modèle d'évolution de population	196
7.2 Étude de l'arbre phylogénique	197
7.2.1 Temps d'apparition de l'ancêtre de deux individus	197
7.2.2 Temps d'apparition de l'ancêtre de r individus	199
7.2.3 Processus de Kingman et commentaires	203
7.3 Le modèle de Wright-Fisher	203
7.4 Modélisation des mutations	206
7.4.1 Estimation du taux de mutation I	208
7.4.2 Estimation du taux de mutation II	212
7.4.3 Conclusion sur l'estimation du taux de mutation	216
Références	216

partie II Modèles continus

8 Chaînes de Markov à temps continu	221
8.1 Construction des chaînes de Markov à temps continu	222
8.1.1 Construction	222
8.1.2 Propriété de Markov	224
8.2 Semi-groupe, générateur infinitésimal	226
8.3 Comportement asymptotique	230
8.4 Processus de Poisson	235
Références	237
9 Files d'attente	239
9.1 Introduction	240
9.1.1 Modélisation des files d'attente	240
9.1.2 Présentation des files $M/M/K$	241
9.2 Étude des files à un serveur : $M/M/1$	243
9.2.1 Probabilité invariante	243
9.2.2 Temps passé dans la file d'attente : client virtuel	246
9.2.3 Temps passé dans la file d'attente : client réel	247
9.3 Étude des files à K serveurs : $M/M/K$	251
9.3.1 Probabilité invariante	251
9.3.2 Temps passé dans la file d'attente : client virtuel	253
9.4 Réseaux de Jackson	257
9.4.1 Modèle et propriétés	257
9.4.2 Files en tandem, processus de sortie	261
9.5 Explosion et récurrence des files $M/GI/1$	262
Références	264

XIV Table des matières

10 Éléments de fiabilité	265
10.1 Introduction à la fiabilité	266
10.1.1 Mesures de performance.....	266
10.1.2 Taux de défaillance	267
10.1.3 Taux de défaillance monotone, lois NBU.....	270
10.2 Simulation.....	274
10.2.1 Inversion du taux de défaillance cumulé	274
10.2.2 Méthode des pannes fictives	275
10.3 Étude de stratégies de maintenance	277
10.3.1 Éléments de renouvellement	278
10.3.2 Remplacement suivant l'âge	282
10.3.3 Remplacement préventif par bloc	285
10.3.4 Comparaisons entre les remplacements suivant l'âge et par bloc	288
10.3.5 Durées entre pannes non identiquement distribuées	292
10.4 Éléments de fiabilité des systèmes complexes	295
10.4.1 Fonction de structure, coupes	295
10.4.2 Calcul de la disponibilité	297
10.4.3 Facteurs d'importance	299
Références	300
11 Lois de valeurs extrêmes	303
11.1 Statistique d'ordre, estimation des quantiles	307
11.2 Exemples de convergence du maximum renormalisé	316
11.3 Limites des maximums renormalisés	320
11.4 Domaines d'attraction	325
11.4.1 Caractérisations générales	325
11.4.2 Domaines d'attraction des lois de Fréchet et Weibull	327
11.5 Estimation du paramètre de la loi de valeurs extrêmes	329
11.5.1 Estimateur de Pickand	329
11.5.2 Estimateur de Hill	332
11.6 Estimation des quantiles extrêmes	336
11.6.1 À l'aide de l'estimateur de Pickand.....	337
11.6.2 À l'aide de l'estimateur de Hill	340
11.7 Conclusion	340
Références	341
12 Processus de coagulation et fragmentation	343
12.1 Équations de coagulation discrètes	344
12.1.1 Définition et propriétés des solutions	344
12.1.2 Solutions explicites pour les noyaux constant, additif et multiplicatif.....	348
12.2 Coagulation et fragmentation discrètes	365
12.3 Chaînes de Markov à temps continu associées	367
12.3.1 Le processus de Marcus-Lushnikov	368

12.3.2 Le processus de transfert de masse	375
Références	383

partie III Appendice

A Rappels de probabilités	387
A.1 Variables aléatoires	387
A.1.1 Espace de probabilité	387
A.1.2 Variables aléatoires	388
A.1.3 Espérance	388
A.1.4 Convergence des espérances	390
A.1.5 Indépendance	391
A.1.6 Variance	391
A.1.7 Fonction caractéristique	392
A.1.8 Transformée de Laplace	393
A.1.9 Probabilités conditionnelles	393
A.2 Lois usuelles	394
A.2.1 Lois discrètes usuelles	394
A.2.2 Lois à densité usuelles	396
A.2.3 Simulation	398
A.3 Convergence et théorèmes limites	400
A.3.1 Convergence de variables aléatoires	400
A.3.2 Loi forte des grands nombres	402
A.3.3 Théorème central limite	402
A.3.4 Intervalles de confiance	403
Références	405
B Une variante du théorème central limite	407
C Fonction de répartition et quantile	411
D Convergence en variation sur un espace discret	415
E Étude d'une équation différentielle ordinaire	417
Références	421
Index	429

La collection Mathématiques & Applications, créée par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), édite des cours avancés de Master et d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Les lecteurs concernés sont donc des étudiants, mais également des chercheurs et ingénieurs qui veulent s'initier aux méthodes et aux résultats des mathématiques appliquées. Les sujets abordés couvrent aussi bien les domaines classiques des mathématiques appliquées (analyse numérique et équations aux dérivées partielles, probabilités et statistiques, recherche opérationnelle...) que des applications plus spécifiques (en sciences naturelles et physiques, économie, informatique, traitement du signal...). Certains ouvrages ont ainsi une vocation purement pédagogique alors que d'autres peuvent constituer des textes de référence.

The series Mathématiques & Applications was founded by the "Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles" (SMAI) with the purpose of publishing graduate-level textbooks in applied mathematics. It is mainly addressed to graduate students, but researchers and engineers will often find here advanced introductions to current research and to recent results in various branches of applied mathematics. The subjects cover classical fields in applied mathematics (numerical analysis and partial differential equations, probabilities and statistics, operations research...) as well as more specific applications (to the natural and physical sciences, economics, computer science, signal processing...). While some books are simple textbooks, others can also serve as references.

Jean-François Delmas
Benjamin Jourdain

Modèles aléatoires

Ce tome présente des modèles aléatoires élémentaires (chaînes de Markov à temps discret et continu, lois de valeurs extrêmes) et certaines de leurs applications courantes : algorithmes d'optimisation, gestion des approvisionnements, dimensionnement de files d'attente, fiabilité et dimensionnement d'ouvrages. Des problématiques plus récentes sont également abordées : recherche de séquences exceptionnelles et de zones homogènes de l'ADN, estimation du taux de mutation de l'ADN, phénomènes de coagulation de molécules de polymères ou d'aérosols.

Ce tome s'adresse à un public très large d'étudiants et d'enseignants. Le pré requis pour sa lecture est la maîtrise du contenu d'un cours d'initiation aux probabilités.

ISBN 978-3-540-33282-4



9 783540 332824

ISSN 1154-483X

ISBN 3-540-33282-0

springer.com

