

PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUES



Jean-Paul Truc

Cours de licence



500 exercices
corrigés



12	7.7. Quelques propriétés classiques utilisées pour démontrer des résultats	105
12	7.8. Calcul d'intégrales composées et intégration par parties	106
22	7.9. Intégration des fractions rationnelles : notion de la primitive	107
22	7.10. Calcul des intégrales trigonométriques : notion d'antiderivée	108
22	7.11. Calcul approché d'intégrales : notion de la fonction intégrale	109
22	Exercices	110
22	Résultats théoriques	111
22	Développements limites	111
22	Exercices	112

Table des matières

1	LES NOMBRES RÉELS	1
1.1	Le corps des réels	1
1.2	Partie entière et développement décimal	4
1.3	Développement en fraction continue	6
1.4	Équation du second degré dans \mathbb{R}	8
1.5	Exercices	9
2	NOMBRES COMPLEXES	17
2.1	Écriture algébrique des nombres complexes	17
2.2	Conjugué et module	18
2.3	Le plan complexe	19
2.4	Racines d'un nombre complexe	22
2.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité	23
2.6	Transformations du plan complexe	24
2.7	Équations algébriques dans le corps \mathbb{C}	25
2.8	Exercices	27
3	LIMITES ET CONTINUITÉ	33
3.1	Limite d'une fonction	33
3.2	Continuité d'une fonction	34
3.3	Opérations sur les limites	35
3.4	Quelques limites usuelles	36
3.5	Limites de polynômes, fractions rationnelles et radicaux	37
3.6	Équivalents et notations de Landau	38
3.7	Fonctions continues sur un intervalle	40
3.8	Continuité séquentielle	42
3.9	Exercices	42
4	CALCUL DIFFÉRENTIEL	47
4.1	Fonction dérivable	47
4.2	Règles de dérivation	50

4.3	Dérivées des fonctions usuelles	51
4.4	Dérivation des fonctions composées	51
4.5	Dérivée d'une fonction réciproque	52
4.6	Dérivée d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	53
4.7	Sens de variation d'une fonction dérivable	53
4.8	Les différentes formules de Taylor	55
4.9	Développements limités	56
4.10	Exercices	58
5	FONCTIONS USUELLES	65
5.1	Généralités sur les fonctions et les applications	65
5.2	Fonctions convexes	66
5.3	Fonctions affines	67
5.4	Fonctions polynômes de degré deux ou trois	68
5.5	Fonctions homographiques	69
5.6	Fonction logarithme népérien	69
5.7	Fonction exponentielle	70
5.8	Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)	71
5.9	Fonctions puissances	71
5.10	Croissance comparée	72
5.11	Fonctions hyperboliques	72
5.12	Formules de trigonométrie hyperbolique	73
5.13	Fonctions trigonométriques réciproques	74
5.14	Fonctions hyperboliques réciproques	75
5.15	Méthode pour étudier une fonction	75
5.16	Exercices	76
6	TRIGONOMÉTRIE	83
6.1	Fonctions trigonométriques	83
6.2	Formules de trigonométrie	84
6.3	Trigonométrie dans le triangle	86
6.4	Équations trigonométriques	86
6.5	Phénomènes ondulatoires	88
6.6	Exercices	90
7	CALCUL INTÉGRAL	97
7.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	97
7.2	Sommes de Riemann	100
7.3	Primitive	101
7.4	Primitive et calcul intégral	102
7.5	Intégration par parties	103
7.6	Changement de variable	104

7.7	Quelques primitives classiques	105
7.8	Calcul d'intégrales comportant des radicaux	106
7.9	Intégration des fractions rationnelles	107
7.10	Calcul des intégrales trigonométriques	108
7.11	Calcul approché d'une intégrale	110
7.12	Intégration des fonctions complexes	111
7.13	Inégalité de Cauchy-Schwarz	111
7.14	Exercices	112
8	SUITES	121
8.1	Suites réelles et complexes	121
8.2	Convergence d'une suite	122
8.3	Suites réelles monotones et adjacentes	123
8.4	Limite sup et limite inf	123
8.5	Règle de calculs sur les limites	124
8.6	Suites équivalentes et notations de Landau	125
8.7	Suites arithmétiques et géométriques	126
8.8	Suites récurrentes	127
8.9	Résolution d'équations	128
8.10	Suites récurrentes linéaires	130
8.11	Suites de Cauchy	132
8.12	Suites récurrentes et fractales	133
8.13	Exercices	133
9	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	141
9.1	Équation différentielle linéaire du premier ordre	141
9.2	Équation de Bernoulli	143
9.3	Équation de Riccati	144
9.4	Équations à variables séparables	144
9.5	Équations différentielles homogènes	145
9.6	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	146
9.7	Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients non constants	148
9.8	Généralités sur les équations différentielles du premier ordre	153
9.9	Système d'équations différentielles	154
9.10	Système autonome, espace des phases	155
9.11	Exercices	158
10	SÉRIES	171
10.1	Généralités sur les séries	171
10.2	Opérations sur les séries numériques	172

10.3 Séries géométriques	173
10.4 Les séries de Riemann	173
10.5 Étude des séries réelles positives	174
10.6 Règles et critères de convergence des séries positives	175
10.7 Comparaison d'une série avec une intégrale impropre	176
10.8 Convergence absolue des séries numériques	177
10.9 Les séries alternées	178
10.10 Produit de Cauchy de deux séries numériques	179
10.11 Problèmes de regroupement de termes	179
10.12 Famille sommable	180
10.13 Exercices	181
11 INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES	189
11.1 Intégrales convergentes ou divergentes	189
11.2 Quelques intégrales de référence	191
11.3 Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives	193
11.4 Changement de variable et intégration par parties	196
11.5 Intégrales absolument convergentes	196
11.6 Intégrale semi-convergente	197
11.7 Fonction intégrable	198
11.8 Intégrales et séries	198
11.9 Exercices	199
12 SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	207
12.1 Convergence simple d'une suite de fonctions	207
12.2 La convergence uniforme	207
12.3 Transmission de propriétés par convergence uniforme	209
12.4 Déivation et convergence uniforme	209
12.5 La convergence uniforme sur tout compact	210
12.6 Convergence simple des séries de fonctions	211
12.7 Convergence uniforme d'une série de fonctions	212
12.8 Convergence normale d'une série	212
12.9 Continuité, intégration, déivation d'une série de fonctions	213
12.10 Quelques développements en séries usuels	214
12.11 La fonction Zéta	214
12.12 Exercices	216
13 SÉRIES DE FOURIER	225
13.1 Fonction périodique (ou signal)	225
13.2 Coefficients de Fourier	227
13.3 Convergence des séries de Fourier	229
13.4 Convergence en moyenne quadratique	231

13.5 Généralisation	237
13.6 Exercices	237
14 SÉRIES ENTIÈRES	249
14.1 Généralités	249
14.2 Rayon de convergence d'une série entière	250
14.3 Méthodes de recherche du rayon de convergence	250
14.4 Opérations sur les séries entières	252
14.5 Convergence normale et uniforme des séries entières	253
14.6 Continuité de la somme d'une série entière	254
14.7 Quelques compléments sur la convergence des séries entières	255
14.8 Intégration terme à terme d'une série entière	256
14.9 Dérivation terme à terme d'une série entière	256
14.10 Série de Taylor d'une fonction C^∞	258
14.11 Fonctions développables en série entières	259
14.12 Résolution d'une équation différentielle linéaire à l'aide des séries entières	261
14.13 Exercices	263
15 FONCTIONS HOLOMORPHES	271
15.1 L'exponentielle complexe	271
15.2 Limites et continuité	272
15.3 Fonctions holomorphes	273
15.4 Intégrale sur un chemin	274
15.5 Analyticité des fonctions holomorphes	278
15.6 Singularités	279
15.7 La méthode des résidus	280
15.8 Exercices	282
16 INTÉGRALE À PARAMÈTRE	289
16.1 La fonction Gamma d'Euler	289
16.2 Cas d'un intervalle d'intégration compact	291
16.3 Le théorème de convergence dominée	294
16.4 Convergence dominée et intégrales à paramètres	295
16.5 Applications aux intégrales doubles	297
16.6 Exercices	299
17 TRANSFORMATION DE LAPLACE	307
17.1 Transformée de Laplace d'une fonction	307
17.2 Propriétés de la transformée de Laplace	310
17.3 Transformation de Laplace et translatées	314
17.4 Changement d'échelle	314

17.5 Table de transformées de Laplace	315
17.6 Transformée de Laplace et produit de convolution	316
17.7 Unicité et transformation inverse	317
17.8 Brève introduction à la théorie des distributions	318
17.9 Exercices	322
18 TRANSFORMATION DE FOURIER	333
18.1 La transformée de Fourier	333
18.2 Lien entre les transformations de Fourier et de Laplace	335
18.3 Premières propriétés de la transformée de Fourier	335
18.4 Influence de la parité	336
18.5 Transformées de Fourier sinus et cosinus	337
18.6 Changement d'échelle	337
18.7 Retard et modulation d'un signal	337
18.8 Déivation et transformation de Fourier	337
18.9 Transformées des fonctions C^∞ à décroissance rapide	338
18.10 Transformée de Fourier-Plancherel sur L_c^2 et L^2	339
18.11 Produit de convolution	340
18.12 Transformation de Fourier inverse	343
18.13 Formule sommatoire de Poisson	345
18.14 Transformée de Fourier discrète	345
18.15 Exercices	348
19 DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS	359
19.1 Probabilité sur un univers	359
19.2 Dénombrement	361
19.3 Événements indépendants et probabilités conditionnelles	362
19.4 Exercices	364
20 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	373
20.1 Variables aléatoires	373
20.2 Loi de probabilité	374
20.3 Espérance et variance	374
20.4 Quelques lois de probabilité	375
20.5 Couple de variables aléatoires	378
20.6 Exercices	382
21 VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES	393
21.1 Fonction de répartition et densité de probabilité	393
21.2 Quelques exemples de variables aléatoires à densité	394
21.3 Fonction de répartition et densité de $Y = \phi(X)$	396
21.4 Espérance et variance	396

21.5 La loi normale	398
21.6 Couple de variables aléatoires continues	400
21.7 Théorèmes de convergence	404
21.8 Approximations par la loi normale	405
21.9 Exercices	406
22 ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION	419
22.1 Introduction à la statistique inférentielle	419
22.2 Distribution d'échantillonnage d'une moyenne	419
22.3 Distribution d'échantillonnage d'une fréquence	421
22.4 Seuils et intervalles de confiance pour la loi normale	422
22.5 Estimation d'une moyenne ou d'une fréquence	422
22.6 Distribution d'échantillonnage d'une différence de moyenne	423
22.7 Loi de Student	423
22.8 Estimation de la moyenne à partir d'un petit échantillon	425
22.9 Le test du khi-deux	425
22.10 Exercices	427
23 STATISTIQUE DESCRIPTIVE ET AJUSTEMENT	433
23.1 Paramètres statistiques	433
23.2 Ajustement linéaire	436
23.3 Exercices	438
24 TABLES	445
24.1 Table de la Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$	445
24.2 Table de la Loi normale centrée réduite pour les grandes valeurs de t	446
24.3 Table de la Loi de Poisson	446
24.4 Loi de Student	447
24.5 Table de la Loi du Khi-deux	448
Index	453

Proposition 1 : Il existe un ensemble de nombres, noté \mathbb{R} , appelé le corps des nombres réels, tel que :

1. \mathbb{Q} est un sous-corps de \mathbb{R} .
2. Le corps \mathbb{R} est commutatif et totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'ordre \leq permanant de comparer deux réels quelconques, et cette relation est compatible avec l'addition des réels et la multiplication par un réel positif.
3. Toute partie de \mathbb{R} non vide et non vide admet une borne supérieure.

Ce livre présente de manière synthétique l'ensemble des notions d'analyse enseignées dans le cursus LMD et en classes préparatoires (fonctions d'une variable réelle ou complexe, calcul intégral et différentiel, suites, séries). On y trouve également les outils nécessaires au traitement du signal (séries de Fourier, transformées de Fourier et de Laplace) et à l'étude des fonctions holomorphes, notions indispensables aux futurs ingénieurs et techniciens.

Une part importante de l'ouvrage traite des probabilités et des statistiques, présentes dans les nouveaux programmes de lycée et de classes préparatoires.

Près de 500 exercices, tous corrigés, permettent de bien comprendre comment utiliser ces notions. Le choix des exercices a été fait de manière à donner de nombreuses applications de ces outils mathématiques.

Cet ouvrage s'adresse à un public varié (L1 à L3, mastères, écoles d'ingénieurs, classes préparatoires). Il sera également utile aux étudiants et enseignants s'intéressant aux applications des mathématiques dans divers domaines (sciences physiques, sciences sociales, mathématiques pures ou appliquées), ainsi que pour la préparation au CAPES et à l'agrégation.

Jean-Paul Truc est professeur en classe préparatoire scientifique. Ses travaux de recherche portent sur les systèmes hamiltoniens. Il a été également chargé de cours à l'université de Savoie pour la préparation à l'agrégation de mathématiques. Il est actuellement rédacteur en chef de la revue Quadrature.

Illustration de couverture : © Anja Kaiser - Fotolia.com



www.editions-ellipses.fr