

# PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUES

Cours de licence

+

500 exercices  
corrigés

Jean-Paul Truc





# Table des matières

<b>1</b>	<b>LES NOMBRES RÉELS</b>	<b>1</b>
1.1	Le corps des réels . . . . .	1
1.2	Partie entière et développement décimal . . . . .	4
1.3	Développement en fraction continue . . . . .	6
1.4	Équation du second degré dans $\mathbb{R}$ . . . . .	8
1.5	Exercices . . . . .	9
<b>2</b>	<b>NOMBRES COMPLEXES</b>	<b>17</b>
2.1	Écriture algébrique des nombres complexes . . . . .	17
2.2	Conjugué et module . . . . .	18
2.3	Le plan complexe . . . . .	19
2.4	Racines d'un nombre complexe . . . . .	22
2.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité . . . . .	23
2.6	Transformations du plan complexe . . . . .	24
2.7	Équations algébriques dans le corps $\mathbb{C}$ . . . . .	25
2.8	Exercices . . . . .	27
<b>3</b>	<b>LIMITES ET CONTINUITÉ</b>	<b>33</b>
3.1	Limite d'une fonction . . . . .	33
3.2	Continuité d'une fonction . . . . .	34
3.3	Opérations sur les limites . . . . .	35
3.4	Quelques limites usuelles . . . . .	36
3.5	Limites de polynômes, fractions rationnelles et radicaux . . . . .	37
3.6	Équivalents et notations de Landau . . . . .	38
3.7	Fonctions continues sur un intervalle . . . . .	40
3.8	Continuité séquentielle . . . . .	42
3.9	Exercices . . . . .	42
<b>4</b>	<b>CALCUL DIFFÉRENTIEL</b>	<b>47</b>
4.1	Fonction dérivable . . . . .	47
4.2	Règles de dérivation . . . . .	50



4.3	Dérivées des fonctions usuelles . . . . .	51
4.4	Dérivation des fonctions composées . . . . .	51
4.5	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	52
4.6	Dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ . . . . .	53
4.7	Sens de variation d'une fonction dérivable . . . . .	53
4.8	Les différentes formules de Taylor . . . . .	55
4.9	Développements limités . . . . .	56
4.10	Exercices . . . . .	58
<b>5</b>	<b>FONCTIONS USUELLES</b>	<b>65</b>
5.1	Généralités sur les fonctions et les applications . . . . .	65
5.2	Fonctions convexes . . . . .	66
5.3	Fonctions affines . . . . .	67
5.4	Fonctions polynômes de degré deux ou trois . . . . .	68
5.5	Fonctions homographiques . . . . .	69
5.6	Fonction logarithme népérien . . . . .	69
5.7	Fonction exponentielle . . . . .	70
5.8	Fonctions exponentielles de base $a$ ( $a > 0$ ) . . . . .	71
5.9	Fonctions puissances . . . . .	71
5.10	Croissance comparée . . . . .	72
5.11	Fonctions hyperboliques . . . . .	72
5.12	Formules de trigonométrie hyperbolique . . . . .	73
5.13	Fonctions trigonométriques réciproques . . . . .	74
5.14	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	75
5.15	Méthode pour étudier une fonction . . . . .	75
5.16	Exercices . . . . .	76
<b>6</b>	<b>TRIGONOMÉTRIE</b>	<b>83</b>
6.1	Fonctions trigonométriques . . . . .	83
6.2	Formules de trigonométrie . . . . .	84
6.3	Trigonométrie dans le triangle . . . . .	86
6.4	Équations trigonométriques . . . . .	86
6.5	Phénomènes ondulatoires . . . . .	88
6.6	Exercices . . . . .	90
<b>7</b>	<b>CALCUL INTÉGRAL</b>	<b>97</b>
7.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	97
7.2	Sommes de Riemann . . . . .	100
7.3	Primitive . . . . .	101
7.4	Primitive et calcul intégral . . . . .	102
7.5	Intégration par parties . . . . .	103
7.6	Changement de variable . . . . .	104



7.7	Quelques primitives classiques . . . . .	105
7.8	Calcul d'intégrales comportant des radicaux . . . . .	106
7.9	Intégration des fractions rationnelles . . . . .	107
7.10	Calcul des intégrales trigonométriques . . . . .	108
7.11	Calcul approché d'une intégrale . . . . .	110
7.12	Intégration des fonctions complexes . . . . .	111
7.13	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	111
7.14	Exercices . . . . .	112
<b>8</b>	<b>SUITES</b> . . . . .	<b>121</b>
8.1	Suites réelles et complexes . . . . .	121
8.2	Convergence d'une suite . . . . .	122
8.3	Suites réelles monotones et adjacentes . . . . .	123
8.4	Limite sup et limite inf . . . . .	123
8.5	Règle de calculs sur les limites . . . . .	124
8.6	Suites équivalentes et notations de Landau . . . . .	125
8.7	Suites arithmétiques et géométriques . . . . .	126
8.8	Suites récurrentes . . . . .	127
8.9	Résolution d'équations . . . . .	128
8.10	Suites récurrentes linéaires . . . . .	130
8.11	Suites de Cauchy . . . . .	132
8.12	Suites récurrentes et fractales . . . . .	133
8.13	Exercices . . . . .	133
<b>9</b>	<b>ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b> . . . . .	<b>141</b>
9.1	Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . . .	141
9.2	Équation de Bernoulli . . . . .	143
9.3	Équation de Riccati . . . . .	144
9.4	Équations à variables séparables . . . . .	144
9.5	Équations différentielles homogènes . . . . .	145
9.6	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . . .	146
9.7	Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients non constants . . . . .	148
9.8	Généralités sur les équations différentielles du premier ordre . . . . .	153
9.9	Système d'équations différentielles . . . . .	154
9.10	Système autonome, espace des phases . . . . .	155
9.11	Exercices . . . . .	158
<b>10</b>	<b>SÉRIES</b> . . . . .	<b>171</b>
10.1	Généralités sur les séries . . . . .	171
10.2	Opérations sur les séries numériques . . . . .	172



10.3	Séries géométriques . . . . .	173
10.4	Les séries de Riemann . . . . .	173
10.5	Étude des séries réelles positives . . . . .	174
10.6	Règles et critères de convergence des séries positives . . . . .	175
10.7	Comparaison d'une série avec une intégrale impropre . . . . .	176
10.8	Convergence absolue des séries numériques . . . . .	177
10.9	Les séries alternées . . . . .	178
10.10	Produit de Cauchy de deux séries numériques . . . . .	179
10.11	Problèmes de regroupement de termes . . . . .	179
10.12	Famille sommable . . . . .	180
10.13	Exercices . . . . .	181
<b>11</b>	<b>INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES</b>	<b>189</b>
11.1	Intégrales convergentes ou divergentes . . . . .	189
11.2	Quelques intégrales de référence . . . . .	191
11.3	Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives	193
11.4	Changement de variable et intégration par parties . . . . .	196
11.5	Intégrales absolument convergentes . . . . .	196
11.6	Intégrale semi-convergente . . . . .	197
11.7	Fonction intégrable . . . . .	198
11.8	Intégrales et séries . . . . .	198
11.9	Exercices . . . . .	199
<b>12</b>	<b>SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS</b>	<b>207</b>
12.1	Convergence simple d'une suite de fonctions . . . . .	207
12.2	La convergence uniforme . . . . .	207
12.3	Transmission de propriétés par convergence uniforme . . . . .	209
12.4	Dérivation et convergence uniforme . . . . .	209
12.5	La convergence uniforme sur tout compact . . . . .	210
12.6	Convergence simple des séries de fonctions . . . . .	211
12.7	Convergence uniforme d'une série de fonctions . . . . .	212
12.8	Convergence normale d'une série . . . . .	212
12.9	Continuité, intégration, dérivation d'une série de fonctions . . . .	213
12.10	Quelques développements en séries usuels . . . . .	214
12.11	La fonction Zêta . . . . .	214
12.12	Exercices . . . . .	216
<b>13</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER</b>	<b>225</b>
13.1	Fonction périodique (ou signal) . . . . .	225
13.2	Coefficients de Fourier . . . . .	227
13.3	Convergence des séries de Fourier . . . . .	229
13.4	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	231



13.5 Généralisation . . . . .	237
13.6 Exercices . . . . .	237
<b>14 SÉRIES ENTIÈRES</b>	<b>249</b>
14.1 Généralités . . . . .	249
14.2 Rayon de convergence d'une série entière . . . . .	250
14.3 Méthodes de recherche du rayon de convergence . . . . .	250
14.4 Opérations sur les séries entières . . . . .	252
14.5 Convergence normale et uniforme des séries entières . . . . .	253
14.6 Continuité de la somme d'une série entière . . . . .	254
14.7 Quelques compléments sur la convergence des séries entières . . . . .	255
14.8 Intégration terme à terme d'une série entière . . . . .	256
14.9 Dérivation terme à terme d'une série entière . . . . .	256
14.10 Série de Taylor d'une fonction $C^\infty$ . . . . .	258
14.11 Fonctions développables en série entières . . . . .	259
14.12 Résolution d'une équation différentielle linéaire à l'aide des séries entières . . . . .	261
14.13 Exercices . . . . .	263
<b>15 FONCTIONS HOLOMORPHES</b>	<b>271</b>
15.1 L'exponentielle complexe . . . . .	271
15.2 Limites et continuité . . . . .	272
15.3 Fonctions holomorphes . . . . .	273
15.4 Intégrale sur un chemin . . . . .	274
15.5 Analyticité des fonctions holomorphes . . . . .	278
15.6 Singularités . . . . .	279
15.7 La méthode des résidus . . . . .	280
15.8 Exercices . . . . .	282
<b>16 INTÉGRALE À PARAMÈTRE</b>	<b>289</b>
16.1 La fonction Gamma d'Euler . . . . .	289
16.2 Cas d'un intervalle d'intégration compact . . . . .	291
16.3 Le théorème de convergence dominée . . . . .	294
16.4 Convergence dominée et intégrales à paramètres . . . . .	295
16.5 Applications aux intégrales doubles . . . . .	297
16.6 Exercices . . . . .	299
<b>17 TRANSFORMATION DE LAPLACE</b>	<b>307</b>
17.1 Transformée de Laplace d'une fonction . . . . .	307
17.2 Propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	310
17.3 Transformation de Laplace et translatées . . . . .	314
17.4 Changement d'échelle . . . . .	314



17.5	Table de transformées de Laplace . . . . .	315
17.6	Transformée de Laplace et produit de convolution . . . . .	316
17.7	Unicité et transformation inverse . . . . .	317
17.8	Brève introduction à la théorie des distributions . . . . .	318
17.9	Exercices . . . . .	322
<b>18</b>	<b>TRANSFORMATION DE FOURIER</b>	<b>333</b>
18.1	La transformée de Fourier . . . . .	333
18.2	Lien entre les transformations de Fourier et de Laplace . . . . .	335
18.3	Premières propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	335
18.4	Influence de la parité . . . . .	336
18.5	Transformées de Fourier sinus et cosinus . . . . .	337
18.6	Changement d'échelle . . . . .	337
18.7	Retard et modulation d'un signal . . . . .	337
18.8	Dérivation et transformation de Fourier . . . . .	337
18.9	Transformées des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide . . . . .	338
18.10	Transformée de Fourier-Plancherel sur $L_c^2$ et $L^2$ . . . . .	339
18.11	Produit de convolution . . . . .	340
18.12	Transformation de Fourier inverse . . . . .	343
18.13	Formule sommatoire de Poisson . . . . .	345
18.14	Transformée de Fourier discrète . . . . .	345
18.15	Exercices . . . . .	348
<b>19</b>	<b>DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS</b>	<b>359</b>
19.1	Probabilité sur un univers . . . . .	359
19.2	Dénombrement . . . . .	361
19.3	Événements indépendants et probabilités conditionnelles . . . . .	362
19.4	Exercices . . . . .	364
<b>20</b>	<b>VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES</b>	<b>373</b>
20.1	Variables aléatoires . . . . .	373
20.2	Loi de probabilité . . . . .	374
20.3	Espérance et variance . . . . .	374
20.4	Quelques lois de probabilité . . . . .	375
20.5	Couple de variables aléatoires . . . . .	378
20.6	Exercices . . . . .	382
<b>21</b>	<b>VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES</b>	<b>393</b>
21.1	Fonction de répartition et densité de probabilité . . . . .	393
21.2	Quelques exemples de variables aléatoires à densité . . . . .	394
21.3	Fonction de répartition et densité de $Y = \phi(X)$ . . . . .	396
21.4	Espérance et variance . . . . .	396

21.5	La loi normale . . . . .	398
21.6	Couple de variables aléatoires continues . . . . .	400
21.7	Théorèmes de convergence . . . . .	404
21.8	Approximations par la loi normale . . . . .	405
21.9	Exercices . . . . .	406
<b>22</b>	<b>ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION</b>	<b>419</b>
22.1	Introduction à la statistique inférentielle . . . . .	419
22.2	Distribution d'échantillonnage d'une moyenne . . . . .	419
22.3	Distribution d'échantillonnage d'une fréquence . . . . .	421
22.4	Seuils et intervalles de confiance pour la loi normale . . . . .	422
22.5	Estimation d'une moyenne ou d'une fréquence . . . . .	422
22.6	Distribution d'échantillonnage d'une différence de moyenne . . . . .	423
22.7	Loi de Student . . . . .	423
22.8	Estimation de la moyenne à partir d'un petit échantillon . . . . .	425
22.9	Le test du khi-deux . . . . .	425
22.10	Exercices . . . . .	427
<b>23</b>	<b>STATISTIQUE DESCRIPTIVE ET AJUSTEMENT</b>	<b>433</b>
23.1	Paramètres statistiques . . . . .	433
23.2	Ajustement linéaire . . . . .	436
23.3	Exercices . . . . .	438
<b>24</b>	<b>TABLES</b>	<b>445</b>
24.1	Table de la Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ . . . . .	445
24.2	Table de la Loi normale centrée réduite pour les grandes valeurs de $t$ . . . . .	446
24.3	Table de la Loi de Poisson . . . . .	446
24.4	Loi de Student . . . . .	447
24.5	Table de la Loi du Khi-deux . . . . .	448
	<b>Index</b>	<b>453</b>



Ce livre présente de manière synthétique l'ensemble des notions d'analyse enseignées dans le cursus LMD et en classes préparatoires (fonctions d'une variable réelle ou complexe, calcul intégral et différentiel, suites, séries). On y trouve également les outils nécessaires au traitement du signal (séries de Fourier, transformées de Fourier et de Laplace) et à l'étude des fonctions holomorphes, notions indispensables aux futurs ingénieurs et techniciens.

Une part importante de l'ouvrage traite des probabilités et des statistiques, présentes dans les nouveaux programmes de lycée et de classes préparatoires.

Près de 500 exercices, tous corrigés, permettent de bien comprendre comment utiliser ces notions. Le choix des exercices a été fait de manière à donner de nombreuses applications de ces outils mathématiques.

Cet ouvrage s'adresse à un public varié (L1 à L3, mastères, écoles d'ingénieurs, classes préparatoires). Il sera également utile aux étudiants et enseignants s'intéressant aux applications des mathématiques dans divers domaines (sciences physiques, sciences sociales, mathématiques pures ou appliquées), ainsi que pour la préparation au CAPES et à l'agrégation.

*Jean-Paul Truc est professeur en classe préparatoire scientifique. Ses travaux de recherche portent sur les systèmes hamiltoniens. Il a été également chargé de cours à l'université de Savoie pour la préparation à l'agrégation de mathématiques. Il est actuellement rédacteur en chef de la revue Quadrature.*

Illustration de couverture : © Anja Kaiser - Fotolia.com



[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)