

Khalid Addi
Daniel Goeleven
Rachid Oujja

Principes mathématiques

pour biologistes, chimistes et
bioingénieurs

Applications
et exercices corrigés



ellipses

Table des matières

1	ELEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL	1
1.1	QUELQUES NOTATIONS	2
1.2	DERIVEE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE	2
1.2.1	Fonction continue	3
1.2.2	Définition et motivation de la dérivée	3
1.2.3	Propriétés des dérivées	11
1.2.4	Dérivée d'ordre n	15
1.2.5	Conditions de Lagrange	15
1.2.6	Fonction exponentielle et fonction logarithme de base a	22
1.2.7	Systèmes de coordonnées semi-logarithmiques	24
1.3	COURBES DE CROISSANCE EN MICROBIOLOGIE	25
1.3.1	Loi exponentielle de Malthus	29
1.3.2	Modèle sigmoïde de croissance	31
1.4	MODELE DE VERHULST EN ZOOLOGIE	34
1.5	DERIVEES PARTIELLES	35
1.5.1	Fonction continue	37
1.5.2	Dérivées partielles	37
1.5.3	Propriétés des dérivées partielles	41
1.5.4	Dérivées partielles d'ordre 2	43
1.6	LOIS DE VITESSE DIFFERENTIELLE EN CHIMIE	43
1.6.1	Réaction élémentaire	46
1.6.2	Réaction complexe	48
1.7	LOIS DE VITESSE DIFFERENTIELLE EN BIOCHIMIE	53
1.7.1	Cinétique enzymatique	53

	1.7.2	Inhibition compétitive	56
	1.7.3	Inhibition non compétitive	59
	1.8	MODELE SECONDAIRE DU TAUX DE CROISSANCE	62
	1.9	EXERCICES	63
2		EQUATIONS DE RECURRENCE	73
	2.1	SUITE DE NOMBRES REELS	74
	2.1.1	Définition et motivation	74
	2.1.2	Suites majorées et minorées	77
	2.1.3	Convergence d'une suite	78
	2.1.4	Suites croissantes et décroissantes	81
	2.2	EQUATION DE RECURRENCE	84
	2.2.1	Solution d'une équation de récurrence	84
	2.2.2	Solution d'équilibre	87
	2.2.3	Attractivité et répulsivité d'un équilibre	89
	2.2.4	Equation de récurrence linéaire d'ordre 1	93
	2.3	MODELE DE RICKER EN BIOLOGIE	96
	2.4	APPLICATIONS EN GENETIQUE	101
	2.4.1	Les rapports de Mendel	102
	2.4.2	Transmission autosomique - les lois de Mendel	105
	2.4.3	La loi de Hardy et Weinberg	108
	2.4.4	Mutation ponctuelle	112
	2.4.5	Mutation ponctuelle et réversion	114
	2.4.6	Homozygotes récessifs létaux	118
	2.4.7	Sélection orientée	122
	2.4.8	Equilibre sélection - mutation	126
	2.5	EXERCICES	128
3		EQUATIONS ALGEBRIQUES	141
	3.1	METHODES DE RESOLUTION	141
	3.1.1	Méthode analytique	142
	3.1.2	Méthode numérique de Newton-Raphson	145
	3.2	EQUATION D'EQUILIBRE EN CHIMIE	151
	3.2.1	Calcul des concentrations à l'équilibre	159
	3.2.2	Calcul de pH	163
	3.2.3	Calcul de pK_a et pK_b	165
	3.2.4	Indicateur en chimie	167

3.2.5	Solution tampon en chimie	167
3.3	EXERCICES	169
4	EQUATIONS DIFFERENTIELLES	179
4.1	MODELE DE DATATION AU CARBONE 14	179
4.2	EQUATION DIFFERENTIELLE ET PROBLEME DE CAUCHY	183
4.2.1	Primitive et intégrale	183
4.2.2	Equation différentielle et problème de Cauchy	187
4.3	EQUATION LINEAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS	191
4.3.1	Résolution du problème homogène	191
4.3.2	Solution d'équilibre	192
4.3.3	Propriété de superposition	192
4.3.4	Problème de Cauchy	193
4.4	CINETIQUE DE REFROIDISSEMENT D'UN ALIMENT	194
4.5	REACTION IRREVERSIBLE D'ORDRE 1 EN CHIMIE	195
4.6	CINETIQUE DE DESTRUCTION THERMIQUE	197
4.7	MODELE DE LA REINE ROUGE	198
4.8	EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE	205
4.8.1	Résolution du problème homogène	205
4.8.2	Recherche d'une solution particulière	206
4.8.3	Propriété de superposition	207
4.8.4	Problème de Cauchy	207
4.9	CINETIQUE DE DESTRUCTION BACTERIENNE	209
4.10	MODELE DE REACTEUR	212
4.10.1	Alimentation et soutirage à débit constant	214
4.10.2	Alimentation et soutirage à débit constant avec recyclage de A	216
4.10.3	Alimentation et soutirage pulsé	219
4.11	UN MODELE DE TRANSIT DE L'UREE DANS LE SANG	220
4.12	UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DE BERNOULLI	223
4.13	REACTION IRREVERSIBLE D'ORDRE $n > 1$ EN CHIMIE	224
4.14	UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DE RICCATI	226
4.14.1	Cas où A et B sont des fonctions constantes	227
4.14.2	Cas général	227
4.15	COURBE DE CROISSANCE EN MICROBIOLOGIE	228

4.15.1	Modèle de croissance exponentielle	228
4.15.2	Modèle de croissance exponentielle avec latence	229
4.15.3	Modèle de croissance logistique de Verhulst	229
4.15.4	Modèle de croissance logistique généralisé	230
4.16	EQUATION CINETIQUE D'UNE REACTION CHIMIQUE	233
4.16.1	Réaction d'interconversion $X \rightleftharpoons Y$	237
4.16.2	Réaction élémentaire $X + Y \rightarrow Z + W$	241
4.16.3	Réaction élémentaire $X \rightleftharpoons Y + Z$	244
4.17	RESOLUTION NUMERIQUE	248
4.17.1	La méthode d'Euler-Cauchy	249
4.17.2	Modèle numérique d'Euler-Cauchy en temps discret	250
4.17.3	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	251
4.17.4	Simulation numérique	252
4.18	MODELE DE MICHAELIS-MENTEN	257
4.19	MODELE DE CROISSANCE BACTERIENNE DE MONOD	261
4.20	INHIBITION ET RETOUR DE CROISSANCE BAC- TERIENNE	264
4.21	EXERCICES	267
5	CALCUL MATRICIEL	283
5.1	MATRICES	283
5.1.1	Matrice rectangulaire $m \times n$	283
5.1.2	Transposée d'une matrice	285
5.1.3	Matrice carrée d'ordre n	285
5.1.4	Vecteurs lignes et vecteurs colonnes	287
5.1.5	Sous-matrices et représentation par blocs	290
5.2	OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES MATRICES	290
5.2.1	Multiplication par un scalaire	290
5.2.2	Addition et soustraction de matrices	291
5.3	OUTIL DE GESTION DE DONNEES ECOLOGIQUES	292
5.4	PRODUIT MATRICIEL	295
5.4.1	Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne	295
5.4.2	Produit de deux matrices	295
5.4.3	Puissance d'une matrice	297
5.5	MATRICES COMPLEXES	297
5.6	MODELE MATRICIEL DU CYCLE DE VIE D'UN ANIMAL	298

5.6.1	Modèle matriciel du cycle de vie d'un rongeur . .	299
5.6.2	Modèle matriciel du cycle de vie d'un insecte . .	303
5.7	MATRICE DE FABRICATION	309
5.8	EXERCICES	311
6	SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES LINEAIRES	323
6.1	INTRODUCTION	323
6.2	MATRICE INVERSE	325
6.2.1	Déterminant d'une matrice carrée	325
6.2.2	Calcul de l'inverse d'une matrice carrée	331
6.3	METHODE DE L'INVERSE	334
6.4	BASE DE VECTEURS	336
6.4.1	Combinaison linéaire de vecteurs	336
6.4.2	Vecteurs linéairements indépendants et base de vecteurs	342
6.4.3	Propriété des lignes et colonnes d'une Matrice inversible	347
6.5	NOYAU ET IMAGE D'UNE MATRICE	348
6.5.1	Noyau d'une matrice de taille $m \times n$	348
6.5.2	Noyau d'une matrice d'ordre n inversible	349
6.5.3	Image d'une matrice $m \times n$	349
6.5.4	Théorème du rang	352
6.5.5	Image d'une matrice d'ordre n inversible	352
6.5.6	Structure de l'ensemble $\mathcal{S}(A; b)$	352
6.6	METHODE DU PIVOT DE GAUSS	353
6.7	SYSTEME COMPLEXE	361
6.8	PROBLEMES DE MELANGE	362
6.9	ANALYSE DE FLUX METABOLIQUES A L'EQUILIBRE	365
6.10	PROCESSUS CHIMIQUES A L'EQUILIBRE	370
6.10.1	Matrice stoechiométrique	373
6.10.2	Matrice de composition	375
6.10.3	Réduction d'un système à l'équilibre en chimie	375
6.11	EXERCICES	383
7	SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES NON LINEAIRES	409
7.1	LINEARISATION D'UNE FONCTION	410
7.1.1	Distance euclidienne et norme	410

7.1.2	Vecteur gradient	412
7.1.3	Matrice Jacobienne	413
7.2	METHODE DE NEWTON-RAPHSON	415
7.3	EQUATIONS D'EQUILIBRE EN CHIMIE	418
7.4	EXERCICES	427
8	MATRICES DIAGONALISABLES	433
8.1	VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES	433
8.1.1	Factorisation d'un polynôme dans \mathbb{C}	434
8.1.2	Calcul des valeurs propres	437
8.1.3	Calcul des vecteurs propres	439
8.2	DIAGONALISATION D'UNE MATRICE	442
8.3	PUISSANCE D'UNE MATRICE	448
8.4	APPLICATIONS EN GENETIQUE	452
8.4.1	Autofécondation chez les plantes diploïdes	452
8.4.2	Méthode des rétrocroisements répétés en agronomie	461
8.5	APPLICATIONS EN ZOOLOGIE	464
8.5.1	Matrice de Leslie	464
8.5.2	Matrice de Lefkovitch	466
8.5.3	Distribution d'une population en classes d'âge stable	468
8.5.4	Distribution d'une population en classes d'âge asymptotiquement stable	471
8.5.5	Modélisation du cycle de vie de l'épaulard	476
8.5.6	Modélisation du cycle de vie du rorqual bleu	479
8.5.7	Modélisation du cycle de vie de la tortue marine Caret	484
8.6	EXERCICES	488
9	SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES	499
9.1	INTRODUCTION	499
9.2	SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS	506
9.3	EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE	509
9.3.1	Définition et propriétés	509
9.3.2	La fonction $t \mapsto e^{At}$	512
9.3.3	Exponentielle d'une matrice diagonalisable	514

9.3.4	La fonction $t \mapsto e^{At}$ dans le cas d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisable	518
9.4	RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE AUTONOME	522
9.4.1	Résolution du problème homogène	523
9.4.2	Solution d'équilibre	523
9.4.3	Solution générale	523
9.4.4	Résolution du problème de Cauchy	524
9.5	RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE NON AUTO- NOME	526
9.5.1	Résolution du problème homogène	527
9.5.2	Solution particulière	527
9.5.3	Solution générale	528
9.5.4	Résolution du problème de Cauchy	528
9.6	RESOLUTION NUMERIQUE	531
9.6.1	Méthode d'Euler-Cauchy	532
9.6.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2	532
9.6.3	Simulation numérique	533
9.7	MODELES A COMPARTIMENTS EN BIOLOGIE	536
9.7.1	Un modèle à deux compartiments du métabolisme hépatique	538
9.7.2	Modèle à compartiments en pharmacodynamique	544
9.8	MODELES PROIE(S)-PREDATEUR(S)	546
9.9	PROCESSUS CHIMIQUE	554
9.9.1	Modélisation mathématique de la cinétique des réactions complexes	554
9.9.2	Réactions successives	558
9.9.3	Réactions compétitives en parallèle	561
9.9.4	Réduction du modèle cinétique	563
9.9.5	Lois de conservation	571
9.10	PROCESSUS BIOCHIMIQUE	572
9.10.1	Modèle dynamique de la cinétique enzymatique	572
9.10.2	Modèle dynamique de la cinétique enzymatique avec inhibition compétitive	575
9.10.3	Modèle quasi-statique de la cinétique enzymatique	580
9.10.4	Modèles quasi-statiques en biochimie	583
9.11	MODELE DE BIOREACTEUR	587
9.12	EXERCICES	592

10 METHODE DES MOINDRES CARRES	621
10.1 PRINCIPE DE LA METHODE	621
10.2 MODELE MORPHOLOGIQUE POUR UNE COULEUVRE	623
10.3 UN SYSTEME PROIES-PREDATEUR : GNOUS, ZEBRES ET LIONS	625
10.3.1 Modèle Proies-Prédateur	627
10.3.2 Identification des paramètres du modèle	628
10.3.3 Identification des paramètres biologiques du gnou	628
10.3.4 Identification des paramètres biologiques du lion	630
10.3.5 Identification des paramètres biologiques du zèbre	632
10.3.6 Modèle Proies-Prédateur à l'équilibre	634
10.3.7 Comparaison des résultats du modèle avec les données	634
10.3.8 Prédiction	636
10.4 EXERCICES	640

Principes mathématiques pour biologistes, chimistes et bioingénieurs

Ce livre traite les domaines mathématiques utiles à l'étude des modèles déterministes utilisés par les biologistes, chimistes et bioingénieurs. Il s'adresse principalement aux étudiants des DUT, BTS, licences et cycles préparatoires dont les domaines de formation sont les suivants : biologie, écologie, chimie, génie de l'environnement, génie des procédés, ingénierie agronomique et agroalimentaire. Il peut également servir d'outil de travail pour les enseignants et chercheurs dans ces disciplines.

Les outils mathématiques et les méthodes d'analyse et de modélisation sont présentés avec précision et illustrés par de nombreuses applications en biologie et chimie.

Les sujets mathématiques traités sont le calcul différentiel, les suites et récurrences, les équations et systèmes d'équations algébriques, les équations et systèmes d'équations différentielles, le calcul matriciel et la méthode des moindres carrés.

Les principales applications concernent les équilibres et la cinétique chimique, les processus biochimiques, la génétique des populations, la croissance en microbiologie, les cycles de vie, les réacteurs chimiques, les bioréacteurs et les systèmes proie-prédateur.

Khalid Addi est docteur en sciences pour l'ingénieur de l'Institut de Science et Génie des Matériaux et Procédés (CNRS).

Daniel Goeleven est ingénieur de l'École Polytechnique de Louvain, Belgique. Il est docteur en mathématiques appliquées. Ils sont tous les deux anciens boursiers de la fondation Alexander von Humboldt et sont actuellement professeurs à l'École Supérieure d'Ingénieurs Réunion Océan Indien (ESIROI).

Rachid Oujja est docteur en mathématiques. Il a été professeur associé à l'université Complutense de Madrid et est actuellement maître de conférences à l'université de La Réunion.



9 782729 883089



www.editions-ellipses.fr