

J. FOURASTIÉ, J.-F. LASLIER

Probabilités et statistique

$$\chi^2 = \sum$$

loi du χ^2 .

La loi s'applique pour v variables indépendantes (n classes statistiques) et que ces variables dépendent l'aide de p relations distinctes, l'on admet que χ^2 suit une loi de « degrés de liberté » ; v est le nombre de variables indépendantes.

Important : le test du χ^2 s'applique à des effectifs observés. Les classes doivent avoir un effectif minimum de 5. On est souvent obligé de réunir plusieurs classes statistiques pour satisfaire à cette dernière condition.

2. APPLICATIONS

Le test du χ^2 peut être appliqué à la plupart des exercices des chapitres qui précèdent.

Exemple 1 (suite) : L'ajustement par une loi binomiale. Les effectifs observés O_i et les effectifs théoriques T_i sont donnés dans les colonnes 2 et 6. On regroupe les deux premières classes car l'effectif des classes doit être suffisant (noté

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$$

on a :

$$\chi^2 = 0,4960$$

Série
J. QUINET

Tableau 1. Ajustement d'une distribution $B(100; 0,04)$ à une distribution observée.

$\sigma = 1,5$

$\sigma = 3$

$\sigma = 5$

Nombre de pièces défectueuses	O_i	T_i	$O_i - T_i$	$(O_i - T_i)^2$	$\frac{(O_i - T_i)^2}{T_i}$
2 } 9	1,69 } 8,72	0,28	0,0784	0,0090	
7 } 9	7,02 }	- 0,50	0,2500	0,0172	
		1,27	1,6129	0,0817	
		- 0,94	0,8836	0,0443	
		1,05	1,1025	0,0691	
		0,48	0,2304	0,0219	

DUNOD

DUNOD

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

CHAPITRE 1 : La statistique, collecte de l'information. Tableaux et graphiques.	4
1. La statistique : définition et vocabulaire	4
2. La collecte de l'information.	6
2.1. Objectif de l'information. Enquête	6
2.2. Quantité d'information	6
2.3. Collecte des données	6
2.4. Différents modes de collecte de l'information	7
3. Dépouillement des observations	7
4. Tableaux statistiques.	8
5. Graphiques	10
5.1. Cas de distributions quantitatives	10
5.2. Cas de distributions qualitatives.	12
<i>Exercices sur le chapitre 1</i>	16
CHAPITRE 2 : Étude des séries statistiques simples	21
1. Introduction.	21
2. La moyenne arithmétique	21
2.1. Cas des données énumérées.	22
2.2. Cas d'une variable discrète	22
2.3. Variable continue et données groupées	23
3. Le mode ou la classe modale.	25
4. La médiane (définition)	26
5. Effectifs ou fréquences cumulés	26
5.1. Variable continue	26
5.2. Variable discrète	27
6. Calcul de la médiane	29
6.1. Cas d'une variable continue.	29
6.2. Cas d'une variable discrète	30
7. Caractéristiques de dispersion.	30
8. Écart absolu moyen	31

9. Écart-type	32
9.1. Définition	32
9.2. Méthode de calcul	32
9.3. Exemples	33
9.4. Signification de l'écart-type	34
9.5. Coefficient de variation	35
10. Caractéristiques de position : quartiles, déciles, centiles	35
10.1. Cas d'une variable continue	36
10.2. Cas d'une variable discrète	36
11. Caractéristiques de dispersion : étendue, écarts interdéciles, écarts inter-quartiles	36
12. Quelques conseils pour l'étude de séries statistiques simples	37
<i>Exercices sur le chapitre 2</i>	39
CHAPITRE 3 : Étude des séries statistiques doubles	42
1. Position du problème	42
2. Notations et représentations des séries statistiques doubles	42
3. Ajustement linéaire. Principe de la méthode des moindres carrés	45
3.1. Ajustement graphique	46
3.2. Autres ajustements	46
3.3. Méthode des moindres carrés	46
3.4. Notion de corrélation linéaire	47
4. Application de la méthode des moindres carrés à des données individuelles	48
4.1. Principe de la méthode	48
4.2. Application à l'exemple du tableau 1	49
4.3. Droite d'estimation de x en y	49
4.4. Retour sur le coefficient de corrélation linéaire	50
5. Application de la méthode des moindres carrés à des données groupées	50
5.1. Méthode	50
5.2. Distributions conditionnelles : courbes de régression	51
5.3. Coefficient de corrélation linéaire	52
5.4. Droites d'estimation par la méthode des moindres carrés	53
6. Ajustements non linéaires	53
7. Quelques conseils pour l'ajustement linéaire	54
<i>Exercices sur le chapitre 3</i>	55

DEUXIÈME PARTIE

CALCUL DES PROBABILITÉS

CHAPITRE 4 : Analyse combinatoire	62
1. Multiplication de deux nombres	62
2. Multiplications répétées : puissances d'un nombre (arrangements avec répétition)	63

3. Multiplications répétées : arrangements sans répétition	63
4. Multiplications répétées : factorielles (nombre de permutations)	63
5. Division	64
6. Combinaisons	65
7. Permutations avec répétitions	65
8. Formules remarquables	66
8.1. A_n^p	66
8.2. $C_n^p = C_n^{n-p}$	66
8.3. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$	66
8.4. Le triangle arithmétique de Pascal	67
8.5. 2^n	67
8.6. La formule du binôme	68
Exercices sur le chapitre 4	69
CHAPITRE 5 : Notions de calcul des probabilités	72
1. Introduction	72
2. Notations	72
3. Les formules des probabilités totales	73
3.1. Pour des événements incompatibles	73
3.2. Pour des événements compatibles	74
4. La formule du nombre de cas favorables	74
5. Quelques exemples de calcul	75
6. Les formules de probabilités composées	77
6.1. Cas général	77
6.2. Événements indépendants	78
7. Le théorème de Bayes	79
8. Conseil	81
Exercices sur le chapitre 5	82
CHAPITRE 6 : Notions rapides sur les variables aléatoires et les principales lois de probabilité	86
1. Définition d'une variable aléatoire	86
2. Variable aléatoire discrète	87
3. Variable aléatoire continue	87
4. Variable aléatoire à deux dimensions	88
5. Espérance mathématique	90
5.1. Définition	90
5.2. Propriétés	90
6. Variance et moments d'une v. a.	91
6.1. Définition	91
6.2. Propriétés	91
6.3. Moments centrés	92
7. Loi binomiale	92
7.1. Définition	92
7.2. Caractéristiques	94
7.3. Symétries de la loi	95
7.4. Loi des fréquences	96

8. Loi hypergéométrique	96
9. Loi de Poisson	96
9.1. Définition	96
9.2. Caractéristiques	97
9.3. Tables	98
10. Loi normale	98
10.1. Définition	98
10.2. Caractéristiques et forme de la distribution	99
10.3. Tables	100
10.4. Loi de probabilité d'une somme de v. a. normales	101
10.5. Loïs dérivées de la loi normale	101
11. Loi du χ^2 de Pearson	101
12. Loi de Student	103
<i>Exercices sur le chapitre 6</i>	105

CHAPITRE 7 : Inégalité de Bienaymé-Tchébichef. Loi faible des grands nombres. Théorème de la limite centrale 113

1. Introduction	113
2. Inégalité de Bienaymé-Tchébichef	113
3. Convergence en probabilité. Convergence en moyenne quadratique	114
4. Loi faible des grands nombres	115
5. Convergence en loi	115
6. Théorème de la limite centrale. Théorème de Liapounoff-Lindeberg	116
7. Application : approximation d'une loi binomiale par une loi normale	116
8. Application numérique	118
<i>Exercices sur le chapitre 7</i>	120

TROISIÈME PARTIE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

CHAPITRE 8 : Les lois statistiques	124
1. Fréquence empirique et probabilité	124
2. Variables statistiques et variables aléatoires	125
3. Ajustement d'une loi binomiale à une série observée	126
4. Ajustement d'une loi de Poisson à une série observée	127
5. Ajustement d'une loi normale à une distribution statistique observée	130
5.1. Ajustement graphique	130
5.2. Ajustement analytique	132
<i>Exercices sur le chapitre 8</i>	134

CHAPITRE 9 : Échantillonnage. Estimation	137
1. Notions sur les sondages	137
2. Vue d'ensemble sur l'échantillonnage et l'estimation.	138
2.1. L'échantillonnage	138
2.2. L'estimation	139
3. Les méthodes d'échantillonnage	140
3.1. Tirages au hasard	140
3.2. Sondage systématique.	141
3.3. Sondages par grappes.	141
3.4. Sondage avec probabilités inégales	141
3.5. Sondage à plusieurs degrés	141
3.6. Méthode des quotas	141
3.7. Sondage stratifié	142
4. Distribution d'échantillonnage	142
4.1. Étude de la variable aléatoire X .	142
4.2. Étude de la moyenne d'échantillon	142
4.3. Étude des proportions	143
5. Estimateurs	145
6. Estimation	145
6.1. Estimation et signification d'une moyenne	146
6.2. Estimation et signification d'une proportion	148
7. Généralités sur l'estimation.	150
<i>Exercices sur le chapitre 9</i>	151
CHAPITRE 10 : Décision statistique. Tests d'hypothèse. Problèmes de comparaison	154
1. Principe de la décision statistique. Test d'hypothèses	155
2. Comparaison à une norme	155
2.1. Comparaison d'une moyenne à une norme	155
2.1.1. L'écart-type de la population P est connu	155
2.1.2. L'écart-type de la population P est inconnu.	156
2.2. Comparaison d'une fréquence à une norme	156
3. Comparaison de deux échantillons.	157
3.1. Comparaison de deux fréquences	157
3.2. Comparaison de deux moyennes.	158
<i>Exercices sur le chapitre 10</i>	160
CHAPITRE 11 : Comparaison de deux distributions : test du χ^2	164
1. Position du problème	164
2. Applications	165
3. Conclusions sur l'application des lois théoriques.	168
4. Tableaux de contingence	169
<i>Exercices sur le chapitre 11</i>	171

CORRIGÉS DES EXERCICES

Chapitre 1	173
Chapitre 2	178
Chapitre 3	188
Chapitre 4	196
Chapitre 5	200
Chapitre 6	206
Chapitre 7	218
Chapitre 8	222
Chapitre 9	228
Chapitre 10	234
Chapitre 11	242
TABLES	249
INDEX	257
SIGNES ET SYMBOLES.	261

Note sur la deuxième édition

Nous tenons à remercier les nombreux lecteurs qui ont bien voulu nous faire profiter de leurs critiques sur la première édition de ce volume. Notre reconnaissance s'adresse tout particulièrement à M. Fernand Chartier, administrateur à l'I.N.S.E.E. et longtemps chef de travaux au C.N.A.M., pour sa relecture attentive et toutes les observations constructives qu'il a faites.

Jacqueline Fourastié

Benjamin Sahler

Note sur la troisième édition

Je remercie M. Benjamin Sahler qui a bien voulu travailler à la première édition de ce livre. Actuellement, ses fonctions ne l'appellent plus à se préoccuper des probabilités ni de statistiques ; il a bien voulu céder la place à M. Jean-François Laslier qui dès maintenant a apporté sa compétence à la nouvelle édition, particulièrement pour les chapitres 4 et 5.

Jacqueline Fourastié

Jacqueline Fourastié
Jean-François Laslier

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

L'ouvrage de Jacqueline Fourastié et Jean-François Laslier a une orientation essentiellement pratique et opérationnelle. Les résultats fondamentaux y sont mis en évidence à partir d'exemples entièrement traités. En outre, des exercices concrets sont proposés à la fin de chaque chapitre et résolus en fin d'ouvrage ; le lecteur est amené à leur donner une forme mathématique et à interpréter les résultats. Le niveau mathématique requis est élémentaire ; le lecteur peut d'ailleurs éviter les démonstrations imprimées en petits caractères. Trois parties composent l'ouvrage : d'abord la statistique descriptive, ensuite le calcul des probabilités, enfin, au carrefour de ces deux domaines, les lois statistiques, l'échantillonnage et l'estimation.

Cet ouvrage est le complément naturel des 5 volumes du « *Cours élémentaire de mathématiques supérieures* » de J. Quinet.



ISBN 2 10 003335 2

www.dunod.com

