

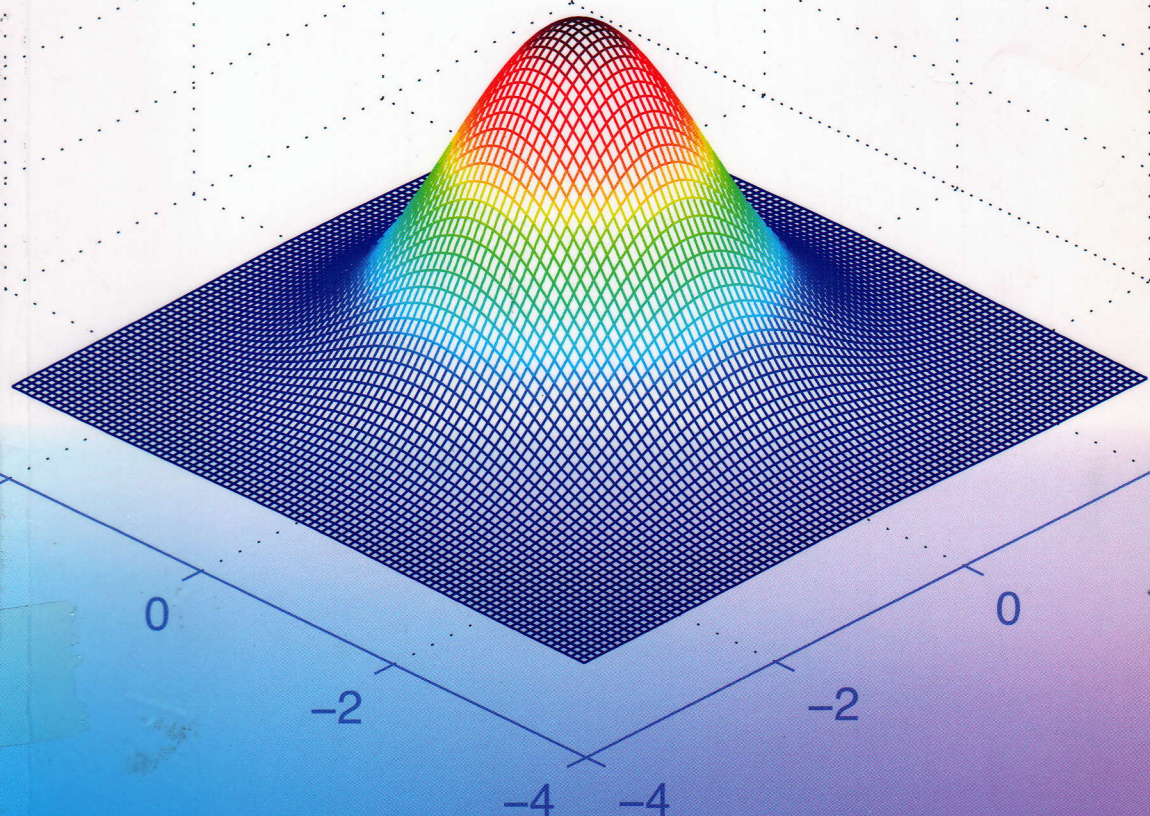
Abdelhamid Zaïdi

Probabilités et statistique à l'usage de l'ingénieur

Cours

Exercices corrigés

Simulation



Editions
TEC
& **DOC**

Lavoisier

Table des matières

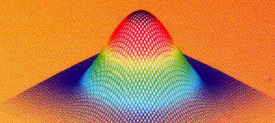
PREMIÈRE PARTIE. PROBABILITÉS GÉNÉRALES	1
Chapitre 1. Modèle et mesure du hasard	3
1.1. L'espace fondamental	3
1.1.1. Définitions et notations	3
1.1.1.1. Propriétés des tribus d'événements	4
1.1.1.2. Exemples de tribus	5
1.1.2. Probabilités, espaces probabilisés	5
1.1.2.1. Espaces probabilisés discrets	6
1.1.2.2. Propriétés élémentaires des probabilités	6
1.1.2.3. Ensembles et événements négligeables	7
1.2. Probabilité conditionnelle et indépendance	7
1.2.1. Probabilités conditionnelles	7
1.2.1.1. Exemple introductif	7
1.2.1.2. Définition et propriétés	8
1.2.2. Événements indépendants	9
1.2.2.1. Définition de l'indépendance de deux événements	9
1.2.2.2. Tribus indépendantes	10
1.2.3. Produit d'espaces probabilisés	10
1.3. Éléments aléatoires	11
1.3.1. Définition et caractérisation	11
1.3.2. Loi de probabilité d'un élément aléatoire	11
1.3.3. Éléments aléatoires indépendants	12
1.4. Exercices	12
Chapitre 2. Variables aléatoires réelles	21
2.1. Attributs d'une variable aléatoire réelle	21
2.1.1. Fonction de répartition	21
2.1.1.1. Variables aléatoires discrètes	23
2.1.1.2. Variables aléatoires réelles absolument continues	24
2.1.2. Espérance mathématique	26
2.1.2.1. Cas d'une variable discrète	26
2.1.2.2. Cas d'une variable aléatoire absolument continue	29
2.1.2.3. Espérance mathématique d'un élément aléatoire	30
2.1.3. Variance	31
2.1.3.1. Variance d'une variable aléatoire discrète	31

2.1.3.2. Variance d'une variable aléatoire absolument continue	31
2.1.4. Fonction caractéristique	32
2.1.4.1. Propriétés de la fonction caractéristique	33
2.1.5. Fonction génératrice des variables aléatoires discrètes entières	33
2.1.5.1. Moment factoriel	34
2.2. Indépendance et convolution	34
2.2.1. Coefficient de corrélation	34
2.2.1.1. Interprétation géométrique dans $L^2(\mathbb{R})$	35
2.2.2. Convolution	35
2.3. Loïs de probabilité usuelles	37
2.3.1. Loïs discrètes	37
2.3.1.1. Expérience de Bernoulli	37
2.3.1.2. Expérience binomiale	37
2.3.1.3. Expérience géométrique	39
2.3.1.4. Expérience hypergéométrique	40
2.3.1.5. Expérience de Poisson	42
2.3.2. Loïs absolument continues	43
2.3.2.1. Loi uniforme	43
2.3.2.2. Expérience exponentielle	44
2.3.2.3. Expérience gamma	44
2.3.2.4. Expérience normale	45
2.3.2.5. Expérience du chi-deux	45
2.4. Convergence des variables aléatoires	46
2.4.1. Exemple introductif	46
2.4.2. La convergence en loi et le théorème central-limite	46
2.4.2.1. Convergence des loïs usuelles	49
2.4.3. La convergence presque sûre	49
2.4.4. Application de la LFGN au calcul numérique - méthode de Monte Carlo	51
2.4.4.1. Principe de la méthode	51
2.4.4.2. Précision de la méthode	51
2.5. Exercices	53
Chapitre 3. Simulation du hasard	69
3.1. Simulateur de variables aléatoires	69
3.1.1. Pourquoi simule-t-on des loïs ?	69
3.1.2. Comment obtenir des nombres au hasard ?	70
3.1.2.1. Générateurs de la loi uniforme sur $[0, 1[$	70
3.2. Simulation d'une variable aléatoire de loi donnée	71
3.3. Méthode d'inversion	71
3.4. Méthode de rejet	73
3.5. Méthode de conditionnement	76
3.5.1. Conditionnements usuels	77
3.6. Méthode de transformation	78
3.6.1. Transformations usuelles	78
3.7. Simulation des loïs usuelles	79
3.7.1. Loïs discrètes	79
3.7.1.1. Loi de Bernoulli	79
3.7.1.2. Loi binomiale	80

3.7.1.3. Loi géométrique	82
3.7.1.4. Loi hypergéométrique	83
3.7.1.5. Loi de Poisson	84
3.7.2. Loïs absolument continues	85
3.7.2.1. Loi exponentielle	85
3.7.2.2. Loi gamma	86
3.7.2.3. Loi normale	87
3.8. Exercices	87
Chapitre 4. Vecteurs aléatoires	97
4.1. Attributs des vecteurs aléatoires	97
4.1.1. Loi de probabilité et lois marginales	97
4.1.2. Fonction de répartition et densité	97
4.1.2.1. Propriétés	97
4.1.2.2. Formule de changement de variables	99
4.1.3. Espérance mathématique et matrice de covariance	102
4.1.4. Fonction caractéristique et convergence en loi	103
4.1.4.1. Propriétés de la fonction caractéristique	103
4.2. Loïs de probabilité usuelles de vecteurs aléatoires	104
4.2.1. Une loi discrète : la loi multinomiale	104
4.2.1.1. Notations	104
4.2.1.2. Fonction caractéristique	105
4.2.1.3. Loïs marginales	105
4.2.1.4. Moments	105
4.2.2. Loi normale à plusieurs dimensions	106
4.3. Exercices	111
Chapitre 5. Loïs conditionnelles et espérances conditionnelles	117
5.1. Conditionnement par une variable aléatoire discrète	117
5.1.1. Espérance conditionnelle	118
5.2. Conditionnement par une variable continue	119
5.3. Exercices	121
DEUXIÈME PARTIE. PROCESSUS DE MARKOV ET FILES D'ATTENTE	137
Chapitre 6. Chaînes et processus de Markov	139
6.1. Chaînes de Markov à états finis	139
6.1.1. Notations et définitions	139
6.1.2. Matrices de transition en plusieurs pas	141
6.2. Chaînes de Markov et graphes orientés	142
6.2.1. Graphe d'une CMH	142
6.2.2. Classification des états d'une CMH	144
6.2.2.1. Notations et définitions	144
6.2.2.2. Classification des états	145
6.3. Loi d'une CMH	148
6.4. Convergence en loi de la CMH	149
6.4.1. Simulation d'une CMH	152
6.5. Processus de Markov	154
6.5.1. Notations et définitions	154

6.5.2. Loi d'un PMH	158
6.5.3. Convergence en loi d'un PMH	161
6.5.4. Processus de Poisson	161
6.5.4.1. Propriétés du processus de Poisson	162
6.5.5. Simulation d'un PMH	163
6.6. Exercices	164
Chapitre 7. Files d'attente	185
7.1. Introduction	185
7.1.1. Caractérisation d'un système de file d'attente	185
7.1.1.1. Processus d'arrivée	185
7.1.1.2. Durée de service	186
7.1.1.3. Discipline de service	186
7.1.1.4. Notation des files d'attente	186
7.1.2. Notations	187
7.1.3. Nombre moyen de clients et temps moyen d'attente en régime stationnaire	187
7.2. Etude de quelques files d'attente	188
7.2.1. File d'attente $M/M/1$	189
7.2.1.1. Comportement asymptotique	190
7.2.2. File d'attente $M/M/s$	194
7.2.2.1. Comportement asymptotique	195
7.2.3. File d'attente $M/M/1/m$	198
7.2.3.1. Comportement asymptotique	198
7.2.4. File d'attente $M/GI/1$	200
7.3. Exercices	205
TROISIÈME PARTIE. STATISTIQUE	221
Chapitre 8. Modèles statistiques	223
8.1. Introduction	223
8.2. Modèle associé à une expérience statistique	224
8.2.1. Définitions et notations	224
8.2.2. Fonction de vraisemblance	225
8.2.3. Modèles d'échantillons empiriques	226
8.3. Statistiques	227
8.3.1. Définitions et exemples	227
8.4. Statistique du maximum de vraisemblance	228
8.4.1. Statistiques indépendantes	229
8.4.2. Statistiques usuelles sur un échantillon empirique	229
8.4.3. Information et réduction des données	231
8.4.4. Formulation de l'information et réduction des données	232
8.4.5. Statistique exhaustive	233
8.4.6. Statistique complète	236
8.4.7. Statistique libre	239
Chapitre 9. Théorie de l'estimation	241
9.1. Généralités sur la décision statistique	241
9.2. Estimation ponctuelle	242

9.2.1. Méthode du maximum de vraisemblance	242
9.3. L'estimation sans biais	246
9.3.1. Recherche des meilleurs estimateurs sans biais	248
9.4. Méthode des moments	252
9.5. Estimation ensembliste	253
9.6. Intervalle de confiance pour une proportion	253
9.7. Exercices	255
Chapitre 10. Tests d'hypothèses	279
10.1. Généralités	279
10.2. Tests d'une hypothèse simple contre une hypothèse simple	281
10.2.1. Caractéristiques d'un test et tests optimaux	281
10.3. Tests d'une hypothèse composée contre une hypothèse composée	283
10.4. Test d'adéquation du Chi-deux	284
10.5. Quelques tests paramétriques usuels	286
10.5.1. Test de normalité des données	286
10.5.2. Test d'égalité des variances	289
10.5.3. Test d'égalité des moyennes	289
10.5.4. Échantillon non appariés	290
10.5.5. Échantillon appariés	290
10.6. Exercices	291
Chapitre 11. Régression linéaire	303
11.1. Régression linéaire multiple	303
11.1.1. Notations	303
11.1.2. Notations du modèle	303
11.1.3. Hypothèses du modèle	304
11.1.4. Estimateur des moindres carrés	304
11.1.5. Variance résiduelle	307
11.1.6. Estimation de σ^2	308
11.2. Prévision	309
11.2.1. Prévision par intervalle de confiance	310
11.3. Lois des estimateurs	311
11.4. Régions de confiance et tests d'égalité de θ	313
11.4.1. Régions de confiance	314
11.4.1.1. Région de confiance de θ	314
11.4.1.2. Région de confiance pour un seul coefficient	315
11.4.1.3. Région de confiance pour un sous-ensemble de coefficients	315
11.4.2. Tests d'égalité de θ	316
11.5. Analyse de la variance	316
11.5.1. Coefficient de détermination	317
11.5.2. Coefficient de détermination ajusté	318
11.6. Régression linéaire simple	318
11.7. Pratique de la régression avec MATLAB	320
11.8. Exercices	320
Annexes	329
A. Tables de lois usuelles	329
B. Index	341



La théorie des probabilités concerne la modélisation du hasard et le calcul des probabilités, son évaluation. La statistique fournit des outils pour la caractérisation du hasard à partir de son observation et constitue un outil incontournable d'aide à la décision.

Ce livre présente la théorie des probabilités et de la statistique généralement enseignée aux ingénieurs. Tout en consacrant plus d'espace aux probabilités, il contient tous les sujets essentiels de la statistique. Il comporte trois parties :

- la première est une introduction à la théorie des probabilités,
- la deuxième partie est consacrée à l'étude des processus de Markov à temps discret et continu et aux systèmes de files d'attente,
- la troisième partie aborde des sujets d'usage courant de la statistique inférentielle : l'estimation, la théorie des tests et la régression linéaire.

L'accent est mis sur les applications des résultats théoriques. Des exercices corrigés extraits de divers champs d'application et des programmes de simulation accompagnent chaque chapitre de l'ouvrage. Les algorithmes de simulation sont traduits en langage MATLAB en vertu de la simplicité de la syntaxe de ce dernier et de son accessibilité à bon nombre de scientifiques. Les fonctions prédéfinies dans les boîtes à outils accompagnant le logiciel MATLAB ne sont pas systématiquement utilisées afin de permettre au lecteur de traduire les programmes proposés dans n'importe quel autre langage.

Ce manuel s'adresse principalement aux étudiants en génie et en sciences appliquées. Il intéresse également les enseignants, les chercheurs, les ingénieurs (génie logiciel, télécommunication, maintenance, finance) et constitue un support de cours dans les écoles d'ingénieurs et les universités.

Abdelhamid Zaïdi, ingénieur diplômé de l'École Nationale Supérieure d'Informatique et des Mathématiques Appliquées à Grenoble, est docteur en mathématiques appliquées de l'Université Joseph Fourier à Grenoble. Il est chargé d'enseignement à l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie à Tunis et forme les agrégatifs à la préparation à l'épreuve de probabilités et de modélisation stochastique à l'Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques à Tunis (Tunisie).

