

Patrick Bogaert

# Probabilités pour scientifiques et ingénieurs

Introduction au calcul des probabilités

COURS  
ET EXERCICES CORRIGÉS

Licence de biologie, de physique,  
de mathématiques, écoles  
d'ingénieurs

LMD



de boeck

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	i
<b>Note aux enseignants</b>	iii
<b>Note aux étudiants</b>	v
<b>Introduction</b>	vii
<b>1 Notions de base</b>	1
1.1 Expérience aléatoire ou épreuve . . . . .	2
1.2 Événement . . . . .	4
1.2.1 Relations entre événements . . . . .	4
1.2.2 Composition d'événements . . . . .	5
1.2.3 Algèbre des événements . . . . .	7
1.2.4 Système complet d'événements ou partition . . . . .	9
1.2.5 Diagrammes en arbre . . . . .	10
1.3 Combinaison d'expériences aléatoires ★ . . . . .	12
<b>2 Notions de probabilité</b>	15
2.1 Probabilité d'un événement . . . . .	16
2.1.1 Définition classique . . . . .	16
2.1.2 Définition en fréquence . . . . .	16
2.1.3 Définition axiomatique . . . . .	18
2.1.4 Probabilités théoriques et subjectives . . . . .	21
2.2 Probabilité conditionnelle . . . . .	22
2.3 Théorème des probabilités composées . . . . .	27
2.4 Théorème des probabilités totales . . . . .	28
2.5 Théorème de Bayes . . . . .	29
2.6 Indépendance . . . . .	33
2.6.1 Indépendance entre événements . . . . .	33
2.6.2 Indépendance conditionnelle ★ . . . . .	36
2.6.3 Indépendance entre épreuves ★ . . . . .	38
<b>3 Variables aléatoires</b>	41
3.1 Définition . . . . .	42
3.2 Variable aléatoire discrète . . . . .	43
3.2.1 Fonction de probabilité . . . . .	44
3.2.2 Fonction de répartition . . . . .	46
3.2.3 Loi de Bernoulli . . . . .	48

3.2.4	Répétitions de l'épreuve de Bernouilli . . . . .	49
	Loi binomiale . . . . .	49
	Loi hypergéométrique . . . . .	52
	Loi géométrique . . . . .	53
	Loi de Pascal ou loi binomiale négative . . . . .	54
3.2.5	Loi de Poisson . . . . .	56
	Approximation de la loi binomiale . . . . .	58
3.3	Variable aléatoire continue . . . . .	59
3.3.1	Fonction de répartition . . . . .	60
3.3.2	Fonction de densité de probabilité . . . . .	62
3.3.3	Loi uniforme . . . . .	63
3.3.4	Loi exponentielle . . . . .	64
3.3.5	Loi normale ou loi de Gauss-Laplace . . . . .	66
3.4	Approximation d'une loi par une autre . . . . .	70
3.5	Variable aléatoire mixte $\star$ . . . . .	71
3.6	Loi de probabilité conditionnelle $\star$ . . . . .	73
3.6.1	Événements définis sur la loi de probabilité . . . . .	74
	Cas général . . . . .	74
	Processus temporels et fonctions de survie . . . . .	76
	Processus sans mémoire . . . . .	77
3.6.2	Événements définis sur d'autres lois . . . . .	79
	Théorème des probabilités totales . . . . .	79
	Probabilités totales et composées . . . . .	80
	Théorème de Bayes . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Grandeurs caractéristiques</b>	<b>85</b>
4.1	Mode . . . . .	86
4.2	Médiane . . . . .	86
4.3	Quantiles . . . . .	88
4.4	Espérance . . . . .	92
4.5	Variance . . . . .	96
4.6	Inégalités intéressantes $\star$ . . . . .	98
4.6.1	Inégalité de Markov . . . . .	99
4.6.2	Inégalité de Chebyshev . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Fonction d'une variable aléatoire</b>	<b>103</b>
5.1	Loi de probabilité . . . . .	104
5.1.1	Cas général . . . . .	104
5.1.2	Cas des fonctions strictement monotones . . . . .	108
5.1.3	Cas des fonctions linéaires . . . . .	109
5.2	Espérance . . . . .	111
5.2.1	Cas général . . . . .	111
5.2.2	Cas des fonctions linéaires . . . . .	114
5.3	Variance . . . . .	115
5.4	Variable centrée réduite . . . . .	116
5.5	Linéarisation d'une fonction non linéaire $\star$ . . . . .	116
5.6	Moments d'une variable aléatoire $\star$ . . . . .	119
5.7	Fonction génératrice des moments $\star$ . . . . .	120
5.8	Fonction caractéristique $\star$ . . . . .	122

<b>6 Couples aléatoires</b>	<b>125</b>
6.1 Domaine de variation conjoint . . . . .	126
6.2 Distribution conjointe . . . . .	126
6.2.1 Fonction de répartition . . . . .	127
6.2.2 Fonction de (densité de) probabilité . . . . .	128
6.3 Probabilité d'un événement . . . . .	130
6.4 Distributions marginales . . . . .	132
6.4.1 Fonctions de répartition . . . . .	133
6.4.2 Fonctions de (densité de) probabilité . . . . .	133
6.5 Distributions conditionnelles . . . . .	136
6.5.1 Cas discret . . . . .	136
6.5.2 Cas continu . . . . .	137
6.5.3 Distribution conditionnelle à un événement . . . . .	139
6.5.4 Théorème des probabilités composées . . . . .	139
6.5.5 Théorème des probabilités totales . . . . .	140
6.5.6 Théorème de Bayes . . . . .	144
6.6 Cas particuliers ★ . . . . .	145
6.6.1 Couple aléatoire mixte . . . . .	145
6.6.2 Couple comme fonctions d'une variable . . . . .	147
Couple $(X, Y)$ avec $Y = h(X)$ . . . . .	147
Couple $(X, Y)$ avec $X = h_x(Z)$ , $Y = h_y(Z)$ . . . . .	148
6.7 Indépendance . . . . .	148
6.8 Caractéristiques du couple aléatoire . . . . .	152
6.8.1 Mode . . . . .	152
6.8.2 Covariance . . . . .	153
6.8.3 Corrélation . . . . .	156
6.8.4 Espérance et variance conditionnelles . . . . .	157
Régression . . . . .	159
Lien entre espérance et espérance conditionnelle . . . . .	161
6.9 Fonctions d'un couple aléatoire . . . . .	162
6.9.1 Cas général . . . . .	162
6.9.2 Quelques cas particuliers ★ . . . . .	164
Cas n°1 : $Z = X + Y$ avec $X \perp Y$ . . . . .	164
Cas n°2 : $Z = X/Y$ avec $X$ et $Y$ quelconques . . . . .	167
Cas n°3 : $Z = \max(X, Y)$ ou $Z = \min(X, Y)$ avec $X \perp Y$ . . . . .	168
6.9.3 Couple fonction d'un autre couple ★ . . . . .	169
6.9.4 Espérance . . . . .	171
Cas général . . . . .	172
Cas des fonctions linéaires . . . . .	173
Cas de l'indépendance . . . . .	174
6.9.5 Variance . . . . .	175
6.9.6 Linéarisation de fonctions non linéaires ★ . . . . .	176
6.9.7 Moments conjoints d'un couple aléatoire ★ . . . . .	178
6.9.8 Fonction génératrice des moments conjoints ★ . . . . .	178
6.9.9 Fonction caractéristique conjointe ★ . . . . .	179
6.10 Couple aléatoire normal . . . . .	181
6.10.1 Fonction de densité conjointe . . . . .	181
6.10.2 Fonction caractéristique conjointe ★ . . . . .	183
6.10.3 Fonctions de densité marginales . . . . .	183
6.10.4 Fonctions de densité conditionnelles . . . . .	184

6.10.5 Indépendance . . . . .	186
6.10.6 Fonctions linéaires . . . . .	186
<b>7 Vecteurs aléatoires</b>	<b>189</b>
7.1 Définition . . . . .	190
7.2 Distribution conjointe . . . . .	191
7.3 Distributions marginales . . . . .	192
7.4 Distributions conditionnelles . . . . .	194
7.5 Indépendance . . . . .	195
7.6 Caractéristiques du vecteur aléatoire . . . . .	197
7.7 Espérance et (co)variance conditionnelles . . . . .	200
7.8 Fonctions d'un vecteur aléatoire . . . . .	203
7.8.1 Cas général . . . . .	203
7.8.2 Cas des fonctions inversibles ★ . . . . .	204
7.8.3 Cas des fonctions linéaires . . . . .	210
7.8.4 Espérance et (co)variance . . . . .	211
Cas des fonctions linéaires . . . . .	213
7.8.5 Linéarisation de fonctions non linéaires ★ . . . . .	216
7.8.6 Fonction caractéristique conjointe ★ . . . . .	217
7.8.7 Moyenne expérimentale . . . . .	219
Loi faible des grands nombres . . . . .	220
7.8.8 Théorème central limite . . . . .	221
7.9 Vecteur aléatoire normal . . . . .	224
7.9.1 Distribution conjointe . . . . .	224
7.9.2 Distributions marginales et conditionnelles . . . . .	225
7.9.3 Indépendance . . . . .	228
7.9.4 Fonctions linéaires . . . . .	229
7.10 Loi multinomiale ★ . . . . .	232
7.10.1 Domaine de variation . . . . .	232
7.10.2 Distribution conjointe . . . . .	233
7.10.3 Regroupements . . . . .	234
7.10.4 Distributions marginales . . . . .	235
7.10.5 Distributions conditionnelles . . . . .	237
7.10.6 Espérances et covariances . . . . .	237
7.10.7 Indépendance . . . . .	239
<b>8 Nombres aléatoires ★</b>	<b>241</b>
8.1 Définition . . . . .	242
8.2 Générateur aléatoire uniforme . . . . .	242
8.3 Générateur aléatoire non uniforme . . . . .	243
8.3.1 Génération par inversion . . . . .	244
8.3.2 Génération par transformation . . . . .	248
8.3.3 Vecteur aléatoire . . . . .	250
Vecteur aléatoire normal . . . . .	253
8.4 Méthodes de Monte-Carlo . . . . .	254
8.4.1 Simulations numériques . . . . .	255
8.4.2 Intégration numérique . . . . .	258
8.4.3 Optimisation par recuit simulé . . . . .	262

<b>9 Introduction à la Statistique *</b>	<b>267</b>
9.1 Population et échantillon . . . . .	268
9.2 Statistique . . . . .	269
9.3 Estimateur ponctuel . . . . .	270
Statistiques d'ordre . . . . .	272
9.3.1 Qualités d'un estimateur . . . . .	274
Biais . . . . .	274
Efficacité . . . . .	276
Consistance . . . . .	279
9.3.2 Obtention d'un estimateur . . . . .	280
Méthode des moments . . . . .	280
Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	282
Méthode des moindres carrés . . . . .	286
Autres méthodes . . . . .	291
9.3.3 Distribution des estimateurs . . . . .	291
9.4 Estimateurs par intervalle de confiance . . . . .	295
9.5 Statistique multivariée . . . . .	299
<b>A Calcul combinatoire</b>	<b>303</b>
A.1 Permutations . . . . .	303
A.2 Arrangements sans répétitions . . . . .	304
A.3 Combinaisons . . . . .	304
A.4 Arrangements avec répétitions . . . . .	305
A.5 Approximation de Stirling . . . . .	306
<b>B Calcul matriciel</b>	<b>307</b>
B.1 Matrices réelles . . . . .	307
B.1.1 Transposée . . . . .	308
B.1.2 Somme et produit . . . . .	308
B.1.3 Forme quadratique . . . . .	309
B.1.4 Inverse . . . . .	309
B.1.5 Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	309
B.1.6 Rang et déterminant . . . . .	309
B.2 Matrices partitionnées . . . . .	310
B.2.1 Transposée, somme et produit . . . . .	310
B.2.2 Inverse et déterminant . . . . .	311
B.3 Dérivées d'ordre 1 . . . . .	311
B.3.1 Cas d'un scalaire . . . . .	311
B.3.2 Cas d'un vecteur . . . . .	312
Changement de variables . . . . .	312
B.3.3 Cas d'une forme quadratique . . . . .	313
B.4 Dérivées d'ordre 2 . . . . .	313
B.5 Espérances et (co)variances . . . . .	314
<b>C Calcul numérique</b>	<b>315</b>
C.1 Polynôme de Taylor . . . . .	315
C.1.1 Fonction d'une variable . . . . .	315
C.1.2 Fonction de plusieurs variables . . . . .	317
Linéarisation de fonctions non linéaires . . . . .	318
Minimum et maximum d'une fonction . . . . .	318

C.2 Dérivation numérique . . . . .	321
C.3 Intégration numérique . . . . .	322
C.3.1 Méthode du polynôme de Taylor . . . . .	323
C.3.2 Méthode des trapèzes . . . . .	323
<b>D Principales lois de probabilité</b>	<b>327</b>
Loi de Bernouilli . . . . .	328
Loi binomiale . . . . .	329
Loi de Cauchy . . . . .	330
Loi du Chi-carré . . . . .	331
Loi d'Erlang . . . . .	332
Loi exponentielle . . . . .	333
Loi de Fisher-Snedecor . . . . .	334
Loi Gamma . . . . .	335
Loi géométrique . . . . .	336
Loi hypergéométrique . . . . .	337
Loi log-normale . . . . .	338
Loi multinomiale . . . . .	339
Loi normale ou de Gauss-Laplace . . . . .	340
Loi du vecteur aléatoire normal . . . . .	341
Loi de Pascal ou binomiale négative . . . . .	342
Loi de Poisson . . . . .	343
Loi de Student . . . . .	344
Loi uniforme . . . . .	345
<b>E Tables</b>	<b>347</b>
Loi binomiale – fonction $p(x)$ . . . . .	348
Loi binomiale – fonction $F(x)$ . . . . .	349
Loi de Poisson – fonction $p(x)$ . . . . .	350
Loi de Poisson – fonction $F(x)$ . . . . .	351
Loi normale réduite – fonction $f(z)$ . . . . .	352
Loi normale réduite – fonction $F(z)$ . . . . .	353
Loi normale réduite – quantiles $z_p$ . . . . .	354
Loi du chi-carré – quantiles $x_p$ . . . . .	355
Loi de Student – quantiles $x_p$ . . . . .	356
Loi de Fisher-Snedecor – quantiles $x_{0.95}$ . . . . .	357
Loi de Fisher-Snedecor – quantiles $x_{0.99}$ . . . . .	362
<b>F Formulaire abrégé</b>	<b>367</b>

# Probabilités pour scientifiques et ingénieurs

## Introduction au calcul des probabilités

Indispensable et incontournable dans le domaine des sciences et de l'ingénierie, l'enseignement du calcul des probabilités est souvent perçu a priori comme un pénible exercice de style par les étudiants non mathématiciens, qui ont du mal à en percevoir les tenants et les aboutissants. Le but de cet ouvrage est d'essayer de remédier à ce paradoxe. Un effort tout particulier a été consenti par l'auteur pour rendre le texte instructif, agréable à lire et facile à suivre.

L'auteur a choisi d'illustrer abondamment par l'exemple les concepts théoriques afin de permettre au lecteur de bien comprendre les notions les plus fondamentales.

Cet ouvrage répond à deux attentes :

- Il constitue le support d'un cours à l'intention des étudiants en science et ingénierie, au niveau d'un premier cycle universitaire. À ce titre, sa présentation a été organisée en allant des concepts les plus élémentaires vers des notions plus élaborées faisant appel à un bagage mathématique plus important. L'ouvrage ayant été conçu pour une lecture linéaire, un enseignant ne devrait avoir aucune difficulté à l'utiliser tout ou en partie selon les exigences requises.
- Ce livre est aussi destiné à servir d'ouvrage de référence pour les chercheurs amenés à devoir utiliser le calcul des probabilités dans le cadre de leurs travaux.



### Les « plus »

- ▶ Très bonne approche, avec une progression logique.
- ▶ Ouvrage complet et agréable à lire.
- ▶ De très nombreux exemples.
- ▶ Des synthèses permettant un accès rapide aux résultats les plus importants.

Patrick Bogaert Ingénieur Agronome, Ph.D. Professeur à l'Université Catholique de Louvain

ISBN 978-2-8041-4794-5

9 782804 147945

PROSCI

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre en France le niveau : Licence 1-2-3.

En Belgique Baccalauréat 1-2-3

En Suisse Bachelor 1-2-3

Au Canada Baccalauréat 1-2-3

