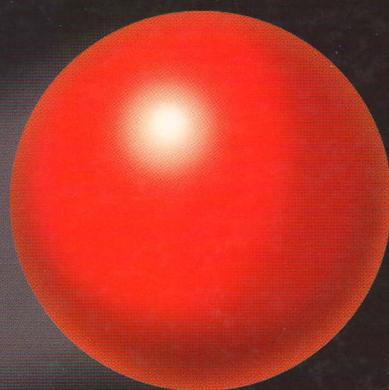
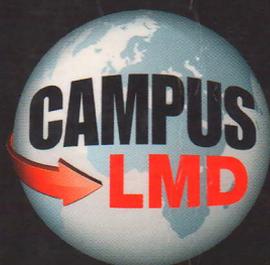


# Statistique et probabilités

Cours et exercices corrigés

Jean-Pierre Lecoutre



*5<sup>e</sup> édition*

DUNOD

# Table des matières

Avant-propos	V
Notations	XIII
Introduction	1
<b>I. Notion de probabilité</b>	<b>5</b>
I. Modèle probabiliste	5
A. Ensemble fondamental	5
B. Algèbre et tribu d'événements	7
C. Probabilité	9
II. Probabilités conditionnelles	13
III. Théorème de Bayes	15
IV. Indépendance en probabilité	17
À retenir	19
<i>Compléments : éléments de combinatoire</i>	19
A. Permutations avec répétition	19
B. Permutations sans répétition ou arrangements	20
C. Permutations avec répétition de $n$ objets, dont $k$ seulement sont distincts	21
D. Combinaisons (sans répétition)	22
E. Combinaisons avec répétition	23
F. Partitions	24
<i>Exercices</i>	25
Énoncés	25
Corrigés	27
<b>2. Variable aléatoire</b>	<b>35</b>
I. Variable aléatoire réelle discrète	36
A. Définition	36
B. Loi de probabilité	37
C. Fonction de répartition	38
D. Moments d'une v.a. discrète	40

II. Variable aléatoire réelle continue	47
A. Définition	47
B. Loi de probabilité	47
C. Propriétés de la fonction de répartition	47
D. Loi continue	48
E. Loi absolument continue	49
F. Moments d'une v.a. absolument continue	52
G. Changement de variable	54

À retenir 56

Compléments 57

A. Application mesurable	57
B. Densité	58
C. Support	58

Exercices 59

  Énoncés 59

  Corrigés 61

### 3. Lois usuelles 69

I. Lois usuelles discrètes 69

  A. Loi de Dirac 69

  B. Loi de Bernoulli 70

  C. Loi binômiale 71

  D. Loi hypergéométrique 74

  E. Loi de Poisson 76

  F. Loi géométrique ou de Pascal 78

  G. Loi binômiale négative 79

II. Lois usuelles continues 80

  A. Loi uniforme 80

  B. Loi exponentielle 82

  C. Loi normale ou de Laplace-Gauss 83

  D. Loi gamma 88

  E. Loi du khi-deux 89

  F. Loi bêta 90

  G. Loi log-normale 92

  H. Loi de Pareto 92

Compléments : fonctions génératrices 92

  A. Fonction génératrice d'une v.a. discrète positive 92

  B. Fonction génératrice d'une loi absolument continue 94

Exercices 96

  Énoncés 96

  Corrigés 99

#### 4. Couple et vecteur aléatoires

109

I. Couple de v.a. discrètes	110
A. Loi d'un couple	110
B. Lois marginales	110
C. Lois conditionnelles	110
D. Moments conditionnels	112
E. Moments associés à un couple	113
F. Loi d'une somme	114
II. Couple de v.a. continues	116
A. Loi du couple	116
B. Lois marginales	119
C. Lois conditionnelles	116
D. Moments associés à un couple	121
E. Régression	122
F. Loi d'une somme	123
III. Vecteur aléatoire	125
IV. Lois usuelles	127
A. Loi multinomiale	127
B. Loi normale vectorielle	129
À retenir	134
Compléments	135
A. Application mesurable	135
B. Changement de variable	135
Exercices	137
Énoncés	137
Corrigés	140

#### 5. Loi empirique

153

I. Échantillon d'une loi	154
II. Moments empiriques	155
A. Moyenne empirique	155
B. Variance empirique	155
C. Moments empiriques	157
III. Échantillon d'une loi normale	157
A. Loi de Student	158
B. Loi de Fisher-Snedecor	159
IV. Tests d'adéquation	160
A. Test du khi-deux	160
B. Test de Kolmogorov-Smirnov	163

<i>À retenir</i>	165
<i>Compléments</i>	165
A. Statistique d'ordre	165
B. Théorème de Fisher	167
<i>Exercices</i>	168
Énoncés	168
Corrigés	169
<b>6. Comportement asymptotique</b>	<b>173</b>
I. Convergence en probabilité	174
A. Inégalité de Markov	174
B. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	175
C. Inégalité de Jensen	175
D. Convergence en probabilité	176
E. Loi des grands nombres	179
II. Convergence en loi	181
A. Définition	181
B. Lien avec la convergence en probabilité	181
C. Propriété	181
D. Théorème de Slutsky	182
E. Conditions suffisantes de convergence en loi	182
F. Théorème central limite	182
G. Limite d'une suite image	183
H. Convergence des moments empiriques	184
I. Convergence des lois usuelles	189
<i>À retenir</i>	189
<i>Compléments</i>	189
A. Convergence presque sûre	189
B. Convergence presque complète	191
<i>Exercices</i>	193
Énoncés	193
Corrigés	194
<b>7. Estimation</b>	<b>199</b>
I. Définition d'un estimateur	200
II. Propriétés d'un estimateur	202
A. Biais d'un estimateur	203
B. Convergence d'un estimateur	204
C. Estimateur optimal	205

III. Méthodes de construction d'un estimateur	210
A. Méthode du maximum de vraisemblance	210
B. Méthode des moments	212
IV. Estimation par intervalle de confiance	213
A. Exemple introductif	213
B. Principe de construction	214
C. Intervalle pour une proportion	216
D. Intervalles associés aux paramètres de la loi normale	220
<i>À retenir</i>	227
<i>Compléments</i>	227
A. Inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao	227
B. Statistique exhaustive	228
C. Famille exponentielle	231
D. Amélioration d'un estimateur	233
<i>Exercices</i>	235
Énoncés	235
Corrigés	239
<b>8. Tests d'hypothèses</b>	<b>257</b>
I. Concepts principaux en théorie des tests	258
II. Méthode de Bayes	261
III. Méthode de Neyman et Pearson	263
A. Principe de la règle de Neyman et Pearson	263
B. Hypothèses simples	264
C. Hypothèses multiples	266
IV. Test d'indépendance du khi-deux	268
<i>À retenir</i>	269
<i>Compléments</i>	270
<i>Exercices</i>	271
Énoncés	271
Corrigés	274
<b>Tables statistiques</b>	<b>289</b>
<b>Index</b>	<b>303</b>

Jean-Pierre Lecoutre

# STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

**Enrichie de nouveaux exercices, cette 5<sup>e</sup> édition présente, de façon claire et pédagogique, les principaux outils de la statistique et des probabilités.** On y trouve :

- une introduction aux notions clés probabilistes ;
- les variables, couples et vecteurs aléatoires ;
- les principales lois de probabilités discrètes et continues ;
- la loi empirique et le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires ;
- la théorie de l'estimation ;
- la théorie des tests.

**L'alternance de cours, d'exemples et d'exercices corrigés** permet de mettre rapidement en pratique les connaissances théoriques. Chaque notion nouvelle ou propriété importante est illustrée par un exemple. Les **nombreux exercices mis à jour** permettent de valider les acquis.

S'appuyant sur de nombreuses années d'expérience de l'enseignement de la statistique dans les cursus d'économie et de gestion, l'auteur a choisi une présentation qui privilégie la compréhension des étudiants.

5<sup>e</sup> édition

**Cours et  
exercices  
corrigés**

JEAN-PIERRE LECOUTRE

Docteur ès sciences mathématiques, il est maître de conférences à l'université Panthéon-Assas (Paris II) et enseigne également dans le Magistère de finance de l'université Paris I.

- Étudiants en Licence économie-gestion
- Étudiants en MASS
- Étudiants des grandes écoles de management et d'ingénieurs



9 782100 580156

6965255

ISBN 978-2-10-058015-6

