

Benoît Cadre  
Céline Vial

# STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

Cours et exercices corrigés



ellipses

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation statistique</b>	<b>1</b>
1.1	Exemple du jeu de pile ou face . . . . .	1
1.2	Principe fondamental de la statistique . . . . .	3
1.3	Modèle statistique . . . . .	6
1.4	Domination dans un modèle statistique . . . . .	10
1.5	Bibliographie . . . . .	11
1.6	Exercices . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Estimation paramétrique</b>	<b>15</b>
2.1	Echantillon . . . . .	15
2.2	Estimation par insertion . . . . .	17
2.3	Critères de performance en moyenne . . . . .	19
2.4	Critères de performance asymptotique . . . . .	24
2.5	Asymptotique de l'erreur d'estimation . . . . .	27
2.6	Bibliographie . . . . .	30
2.7	Exercices . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Intervalle de confiance</b>	<b>33</b>
3.1	Principe général . . . . .	33
3.2	Intervalle de confiance par excès . . . . .	35
3.3	Intervalle de confiance asymptotique . . . . .	39
3.4	Bibliographie . . . . .	40
3.5	Exercices . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Estimation par vraisemblance</b>	<b>43</b>
4.1	Vraisemblance . . . . .	43
4.2	Maximum de vraisemblance . . . . .	45
4.3	Information de Kullback-Leibler . . . . .	47
4.4	Consistance . . . . .	49
4.5	Information de Fisher . . . . .	53
4.6	Normalité asymptotique . . . . .	58
4.7	Bibliographie . . . . .	61
4.8	Exercices . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Classification des statistiques</b>	<b>63</b>
5.1	Efficacité . . . . .	63
5.2	Exhaustivité . . . . .	67
5.3	Complétude . . . . .	73
5.4	Bibliographie . . . . .	74
5.5	Exercices . . . . .	75

## TABLE DES MATIÈRES

<b>6</b>	<b>Test statistique</b>	<b>77</b>
6.1	Problème de test . . . . .	77
6.2	Test statistique . . . . .	79
6.3	Risques d'un test . . . . .	80
6.4	Comparaison des tests . . . . .	84
6.5	Optimalité dans les tests simples . . . . .	86
6.6	Optimalité dans les tests composites . . . . .	89
6.7	Test asymptotique . . . . .	93
6.8	Bibliographie . . . . .	94
6.9	Exercices . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Statistique des échantillons gaussiens</b>	<b>97</b>
7.1	Projection de vecteurs gaussiens . . . . .	97
7.2	Tests sur les paramètres d'un échantillon . . . . .	100
7.3	Test d'égalité des lois de $k$ échantillons . . . . .	102
7.4	Régression linéaire multiple . . . . .	105
7.5	Bibliographie . . . . .	108
7.6	Exercices . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Tests d'adéquation et d'indépendance</b>	<b>111</b>
8.1	Test du Chi-2 d'adéquation . . . . .	111
8.2	Test du Chi-2 d'indépendance . . . . .	115
8.3	Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	119
8.4	Bibliographie . . . . .	122
8.5	Exercices . . . . .	123
	<b>Correction des exercices</b>	<b>125</b>
	Exercices du chapitre 1 . . . . .	125
	Exercices du chapitre 2 . . . . .	131
	Exercices du chapitre 3 . . . . .	140
	Exercices du chapitre 4 . . . . .	146
	Exercices du chapitre 5 . . . . .	151
	Exercices du chapitre 6 . . . . .	156
	Exercices du chapitre 7 . . . . .	162
	Exercices du chapitre 8 . . . . .	167
	<b>Notations et lois de probabilités</b>	<b>171</b>
	<b>Compléments : intégration et probabilités</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>
	<b>Index terminologique</b>	<b>185</b>

# Statistique mathématique

## Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage d'introduction à la statistique s'adresse aux étudiants de licence ou master de mathématiques, aux agrégatifs de mathématiques et enfin aux élèves des écoles d'ingénieurs.

Les notions fondamentales de cette discipline sont construites à partir d'un cas d'école, l'étude du jeu de pile ou face, dont l'objectif est d'obtenir des informations sur la probabilité que la pièce tombe sur pile. La démarche statistique générale est extrapolée à partir de cet exemple qui illustre, naturellement et sans difficultés techniques, les concepts de modèle statistique, échantillon, estimateur, biais, risque quadratique, consistance, vitesse et loi limite, maximum de vraisemblance, efficacité, exhaustivité, complétude...

En s'appuyant sur ce formalisme mathématique, le livre aborde aussi la construction et l'étude des outils majeurs au niveau pratique que sont les intervalles de confiance et les tests statistiques. De nombreux exercices corrigés sont proposés dans l'ouvrage.

*Benoît Cadre est professeur des universités à l'antenne de Bretagne de l'École normale supérieure de Cachan.*

*Céline Vial est maître de conférences à Polytech Lyon.*

