

Toutes les
PROBABILITÉS
et les
STATISTIQUES

Cours et exercices corrigés

Jacques Dauxois

Claudie Hassenforder

ellipses

Table des matières

Avant propos	3
<hr style="border-top: 3px double #000;"/>	
Cours	
Chapitre 1 Approche heuristique de l'axiomatisation du Calcul des Probabilités	11
1.1 Introduction	11
1.1.1 Généralités	11
1.1.2 De l'utilité d'une modélisation	11
1.2 Présentation heuristique du modèle probabiliste	12
1.2.1 Quelques exemples de situations aléatoires	12
1.2.2 Espace fondamental	12
1.2.3 Événements	13
1.2.4 Notion de probabilité	15
1.3 Sur la modélisation d'un phénomène aléatoire	16
1.4 Introduction à la notion de variables aléatoires	17
1.5 Probabilité conditionnelle. Indépendance	18
1.5.1 Probabilité conditionnelle à un événement	18
1.5.2 Événements indépendants	19
1.5.3 Variables indépendantes	20
Exercices	20
Chapitre 2 Tribus et Probabilités	23
2.1 Tribus	23
2.1.1 Définitions. Premières propriétés	23
2.1.2 Tribu engendrée par une famille de parties	24
2.1.2.1 Exemples élémentaires	24
2.1.2.2 Tribu engendrée par une partition finie ou dénombrable	25
2.1.2.3 Cas général	25
2.1.3 Tribu sur un ensemble fini ou dénombrable	26
2.1.4 Tribu des boréliens de \mathbb{R}^d	27
2.1.5 Tribu trace	28
2.2 Probabilités	28
2.2.1 Définitions. Propriétés élémentaires	28
2.2.2 Propriétés des suites d'événements	30
2.2.3 Caractérisation d'une probabilité sur une tribu engendrée par une partition finie ou dénombrable	31
2.2.4 Probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$	35
2.2.4.1 Probabilités discrètes	36
2.2.4.2 Importance de la notion de tribu	37
2.2.4.3 Caractérisation des probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$	37
2.2.4.4 Propriétés des fonctions de répartition pour $d = 1$	38
2.2.4.5 Probabilité absolument continue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$	39
2.2.4.6 Décomposition d'une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$	41
Exercices	43

Chapitre 3 Conditionnement et indépendance. Espace probabilisé produit	49
3.1 Probabilité conditionnelle à un événement	49
3.1.1 Définition et propriétés élémentaires	49
3.1.2 Exemples	51
3.2 Événements indépendants. Familles indépendantes	51
3.2.1 Définition	51
3.2.2 Propriétés élémentaires de l'indépendance	52
3.2.3 Généralisation	53
3.3 Espace probabilisable produit	54
3.3.1 Ensemble fondamental	55
3.3.2 Événements	55
3.3.3 Choix de la probabilité	58
3.3.4 Exemple	58
3.4 Espace probabilisé produit	58
3.4.1 Cas de tribus engendrées par des partitions	58
3.4.2 Cas général	58
3.4.3 Échantillon d'une loi	59
3.4.4 Exemples	60
3.5. Un nouveau type de probabilité	60
3.6. Variables aléatoires indépendantes	61
Exercices	62
Chapitre 4 Variables aléatoires. Loi d'une variable aléatoire	65
4.1 Variable aléatoire	65
4.1.1 Définition. Une propriété de stabilité	65
4.1.2 Tribu engendrée par une application. Caractérisation de la mesurabilité	67
4.1.3 Le \mathbb{R} -espace des variables aléatoires réelles	71
4.1.4 Caractérisation d'une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, \mathcal{A}) , où \mathcal{A} est engendrée par une partition finie ou dénombrable	72
4.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire	73
4.2.1 Définition et première caractérisation	73
4.2.2 Lois conjointes et lois marginales	74
4.3 Vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d	75
4.3.1 Fonctions de répartition et de survie d'un vecteur aléatoire	75
4.3.2 Vecteurs aléatoires absolument continus	76
4.3.3 Cas général	79
4.4 Lois marginales et conditionnelles	80
4.4.1 Cas discret	81
4.4.2 Lois conditionnelles d'un couple absolument continu	82
4.5 Changement de variables	84
Exercices	85
Chapitre 5 Lois et variables aléatoires discrètes	89
5.1 Moments d'une probabilité sur une partie discrète de \mathbb{R}	89
5.2 Le cas particulier des probabilités sur \mathbb{N}	91
5.3 Fonction génératrice d'une probabilité sur \mathbb{N}^d	94
5.4 Fonction génératrice des moments. Fonction caractéristique	95
5.4.1 Transformée de Laplace d'une probabilité discrète sur \mathbb{R}	95

5.4.2	Transformée de Fourier d'une probabilité discrète sur \mathbb{R}	96
5.5	Moments d'une variable aléatoire réelle discrète	97
5.5.1	Définition des moments d'une variable aléatoire réelle discrète et premières propriétés	97
5.5.2	L'espace vectoriel $L^1_d(P)$	100
5.5.3	L'espace $L^2_d(P)$	102
5.5.4	L'espace $L^k_d(P)$	104
5.6	Fonctions génératrice et caractéristique	105
5.6.1	Cas des variables aléatoires réelles discrètes	105
5.6.2	Fonction génératrice d'un d -uple de variables aléatoires entières	106
5.7	Quelques exemples classiques de lois discrètes	109
5.7.1	Équiprobabilité	109
5.7.2	Lois de Bernoulli	110
5.7.3	Lois binomiales	111
5.7.4	Lois multinomiales $M_k(n,p)$ à k catégories	112
5.7.5	Lois hypergéométriques	113
5.7.6	Lois géométriques	117
5.7.7	Lois de Poisson	118
5.7.8	Lois binomiales négatives	118
	Exercices	119
Chapitre 6 Lois sur \mathbb{R}^d et vecteurs aléatoires		125
6.1	Espérance mathématique d'une probabilité sur \mathbb{R}	125
6.2	Moments d'une variable aléatoire réelle	127
6.2.1	Définition	127
6.2.2	L'espace vectoriel $L^1(P)$	130
6.2.3	L'espace de Hilbert $L^2(P)$	131
6.2.4	Les espaces $L^k(P)$, pour k appartenant à \mathbb{N}^*	133
6.3	Inégalités et moments d'une variable aléatoire réelle	134
6.3.1	Inégalité de Jensen pour les espérances mathématiques	134
6.3.2	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebicheff	135
6.4	Changement de variables et espérance mathématique	136
6.5	Matrice des covariances d'un d -uple de variables aléatoires réelles	137
6.5.1	Espérance mathématique d'un vecteur aléatoire	137
6.5.2	Covariance d'un vecteur aléatoire	138
6.6	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire	140
6.6.1	Cas d'une variable aléatoire réelle	140
6.6.2	Cas des vecteurs aléatoires	142
6.7	Quelques lois classiques absolument continues sur \mathbb{R}	143
6.7.1	Lois uniformes sur un borélien borné de \mathbb{R}^d	143
6.7.2	Les lois de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$	144
6.7.3	La famille des lois $\gamma(\lambda, a)$ de paramètres $\lambda > 0$ et $a > 0$	144
6.7.4	Les lois Bêtas	146
6.7.5	Les lois normales sur \mathbb{R} . Lois binormales sur \mathbb{R}^2	147
6.8	Lois gaussiennes et lois elliptiques sur \mathbb{R}^d	149
6.8.1	Caractérisation d'un vecteur gaussien au moyen de sa fonction caractéristique	150
6.8.1.1	Cas d'un vecteur gaussien centré	150
6.8.1.2	Cas où le vecteur est non centré	151

6.8.2 Quelques propriétés des vecteurs gaussiens	153
6.8.2.1 Vecteur gaussien et indépendance	153
6.8.2.2 Transformation linéaire d'un vecteur gaussien centré	153
6.8.3 Vecteurs gaussiens dégénérés et non dégénérés	154
6.8.4 Vecteurs aléatoires elliptiques sur \mathbb{R}^d	155
6.9 Introduction aux lois de Wishart	158
Exercices	161
Chapitre 7 Variables aléatoires indépendantes	169
7.1 Introduction	169
7.2 Définition de l'indépendance de variables aléatoires et premières propriétés	169
7.3 Diverses caractérisations de l'indépendance	171
7.3.1 Un résultat relativement général	171
7.3.2 Cas de variables aléatoires discrètes	171
7.3.3 Cas des variables aléatoires réelles	172
7.3.4 Cas des vecteurs aléatoires absolument continus	172
7.3.5 Deux lois classiques en Statistique	174
7.4 Indépendance et moments des variables aléatoires réelles	177
7.4.1 Quelques propriétés	177
7.4.2 Indépendance de variables aléatoires entières et fonctions génératrices	179
7.4.3 Indépendance et fonctions caractéristiques	180
7.5 Somme de variables aléatoires indépendantes	180
7.5.1 Le cas discret	181
7.5.1.1 Cas général	181
7.5.1.2 Deux remarques	181
7.5.1.3 Deux exemples classiques	182
7.5.1.4 Somme de variables aléatoires entières et fonctions génératrices	183
7.5.2 Le cas absolument continu	184
7.5.2.1 Un résultat de base	184
7.5.2.2 Un exemple fondamental	185
7.5.3 Somme de variables aléatoires réelles indépendantes et fonction caractéristique	186
7.6 À propos d'échantillons d'un vecteur aléatoire	187
7.6.1 Vecteur aléatoire euclidien	187
7.6.2 Matrices aléatoires à coefficients réels	191
7.6.3 Quelques généralités sur les échantillons de vecteurs aléatoires	192
Exercices	195
Chapitre 8 Convergence de lois et des suites de variables aléatoires réelles	205
8.1 Convergence presque sûre	205
8.1.1 Définition	205
8.1.2 Propriétés élémentaires de la convergence presque sûre	208
8.1.3 Le théorème de convergence dominée	208
8.1.4 Une loi forte des grands nombres	208
8.2 Convergences en moyenne et en moyenne quadratique	209
8.2.1 Convergence en moyenne	209
8.2.2 Convergence en moyenne et espérance mathématique	210
8.2.3 Convergence en moyenne quadratique	210
8.2.4 Un critère élémentaire de convergence en moyenne quadratique	211

8.2.5. Convergence en moyenne, convergence en moyenne quadratique et convergence presque sûre	211
8.3 Convergence en probabilité	212
8.3.1 Définition	212
8.3.2 Comparaison avec les autres modes de convergence	213
8.3.3 Opérations et convergence en probabilité	214
8.4. Convergence de lois. Approximations de loi	214
8.4.1 Définition	214
8.4.2. Une condition suffisante de convergence des lois (cas absolument continu) ..	216
8.4.3. Cas de lois ou variables aléatoires réelles discrètes	218
8.4.4 Un théorème de la limite centrée	220
8.4.5. Convergence des lois et autres modes de convergence	222
Exercices	226
Chapitre 9 Régressions linéaire et non linéaire. Espérance conditionnelle	233
9.1 Introduction. Régression linéaire	233
9.2. Régression non linéaire et espérance conditionnelle	235
9.2.1 Introduction. Un cas élémentaire	235
9.2.2 Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire réelle discrète ayant une espérance mathématique à une variable aléatoire discrète	239
9.2.3 Le cas général	245
9.2.3.1 Une définition provisoire	245
9.2.3.2 Quelques propriétés de l'espérance conditionnelle	247
Exercices	254

Annexes

Annexe 1 Calculs de sommes et d'intégrales : mode opératoire	267
A1.1 Famille (absolument) sommable	267
A1.2 Intégrales multiples	272
A1.3 "Intégration mixte"	278
Annexe 2 Quelques compléments sur les séries	280
A2.1 Quelques propriétés de la somme d'une série entière	280
A2.2 Quelques inégalités classiques	282
Annexe 3 Les fonctions eulériennes	286
A3.1 La fonction Gamma	286
A3.2 La fonction Bêta	287
Annexe 4 Familles sommables de réels	288
A4.1 Sommabilité d'une famille de réels positifs	289
A4.1.1 Définition de la sommabilité	290
A4.1.2 Un exemple de famille sommable	290
A4.1.3 Propriétés	291
A4.1.4 Application du principe de comparaison	292
A4.2 Famille sommable de réels. Sommabilité absolue	293
A4.2.1 Définitions	293
A4.2.2 Propriétés	293
A4.2.3 Associativité (sommation par paquet)	295

A4.2.4. Produit de familles sommables.....	298
A4.2.5. Sommabilité et séries.....	299
Annexe 5 Espaces préhilbertiens réels. Espaces euclidiens.....	300
A5.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz.....	300
A5.2 Produit scalaire. Espace préhilbertien réel.....	302
A5.3 Angle de deux vecteurs. Orthogonalité.....	304
A5.4 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.....	306
A5.5 Dual d'un espace euclidien. Théorème de Riesz.....	308
A5.6 Opérateur adjoint.....	311
A5.7 Introduction au problème de la meilleure approximation et à la notion de projection orthogonale sur un sous-espace.....	315
A5.7.1 Le problème.....	315
A5.7.2 Projecteur orthogonal sur un sous-espace.....	315
Annexe 6. Passer d'une forme hermitienne positive à un produit scalaire, d'une semi-norme à une norme.....	321
A6.1 Forme hermitienne positive et produit scalaire.....	321
A6.2 Semi-norme et norme.....	322
Annexe 7 Tableaux récapitulatifs.....	323
A7.1 Lois discrètes usuelles.....	323
A7.2 Lois absolument continues usuelles.....	327
A7.3 Tables statistiques.....	331
A7.3.1 Cas d'une densité paire.....	333
A7.3.2 Cas d'une densité nulle sur \mathbb{R}_-	334

Solutions des exercices

Chapitre 1 Approche heuristique de l'axiomatisation du Calcul des Probabilités ...	337
Chapitre 2 Tribus et Probabilités.....	340
Chapitre 3 Conditionnement et indépendance. Espaces probabilisés produits.....	354
Chapitre 4 Variables aléatoires. Loi d'une variable aléatoire.....	358
Chapitre 5 Lois et variables aléatoires discrètes.....	365
Chapitre 6 Lois sur \mathbb{R}^d et vecteurs aléatoires.....	380
Chapitre 7 Variables aléatoires indépendantes.....	405
Chapitre 8 Convergences de lois et des suites de v.a.r.....	426
Chapitre 9 Régressions linéaire et non linéaire. Espérance conditionnelle.....	446

Problèmes

Pour chaque problème, on indique un (des) thème(s) principal(aux).

Problème 1 Lois sur \mathbb{R} de f.d.r. F et de densité f vérifiant : $(1 - F(x))^{-1} \int_x^{+\infty} t f(t) dt = Ax + B$	481
Corrigé.....	482
Problème 2 Loi de Paréto bivariée ; exemple de loi sur \mathbb{R}^2 ayant une partie "diffuse".....	487
Corrigé.....	487
Problème 3 Une loi exponentielle bivariée non absolument continue.....	491
Corrigé.....	492
Problème 4 Étude d'une famille de lois bivariées. Indépendance conditionnelle.....	496
Corrigé.....	497

Problème 5 Loi de Paréto bivariée ayant des lois conditionnelles de Paréto	502
Corrigé.....	504
Problème 6 Autour de la loi de Weibull	509
Corrigé.....	510
Problème 7 Une famille de lois sur \mathbb{R}^2 fonctions d'un paramètre réel	516
Corrigé.....	517
Problème 8 Étude de convergences	526
Corrigé.....	527
Problème 9 Approche de la Statistique Mathématique	530
Corrigé.....	531
Problème 10 Une mesure d'association	536
Corrigé.....	537
Problème 11 Loi conditionnelle. Changement de variable	542
Corrigé.....	543
Problème 12 Perturbation d'une densité	548
Corrigé.....	549
Problème 13 Somme d'indicatrices non indépendantes	554
Corrigé.....	555
Problème 14 Lois d'éléments propres d'une matrice aléatoire	560
Corrigé.....	561
Problème 15 Optimisation sous contrainte d'une forme quadratique à coefficients aléatoires	566
Corrigé.....	568
Problème 16 Sur le thème des records	574
Corrigé.....	576
Problème 17 Comparaison d'estimateurs sans biais	580
Corrigé.....	581
Problème 18 Amélioration d'estimateur	584
Corrigé.....	585
Problème 19 Somme aléatoire de variables aléatoires	587
Corrigé.....	588
Problème 20 Loi multinomiale	591
Corrigé.....	592
Problème 21 Une loi binomiale bivariée	595
Corrigé.....	596
Problème 22 Lois de Poisson et binomiale bivariées	601
Corrigé.....	603
Problème 23 Une approche élémentaire de la Statistique	607
Corrigé.....	609
Problème 24 Étude d'une loi elliptique	614
Corrigé.....	616
Problème 25 Un mélange de loi	623
Corrigé.....	624

Projets

Thème(s) essentiel(s) par projet

Projet 1 Quelques propriétés de la transformée de Laplace	631
Corrigé.....	632
Projet 2 Transformée de Pyke	637
Corrigé.....	638

Projet 3 Construction de lois au moyen de polynômes orthogonaux	642
Corrigé	643
Projet 4 Transformée de Pyke 2	651
Corrigé	652
Projet 5 Transformée de Pyke 3	660
Corrigé	661
Projet 6 Version multidimensionnelle de la transformée de Pyke	673
Corrigé	674
Projet 7 Variations sur la fonction génératrice de Laplace	677
Corrigé	678
Projet 8 Étude de familles de lois perturbées d'une loi produit	683
Corrigé	686
Projet 9 Éléments de fiabilité; absence de mémoire en uni et bi-dimensionnel	711
Corrigé	715
Projet 10 Information, familles exponentielles, indices de concentration.....	728
Corrigé	740
Notations	766
Index	770
Quelques références bibliographiques	775

Cet ouvrage donne un exposé du calcul des probabilités, avec des ouvertures sur la statistique mathématique, dans la perspective du nouveau cadre LMD mis en place dans les universités. Son option est de proposer une lecture à plusieurs niveaux. L'un concerne les étudiants de deuxième année. L'autre, grâce à de nombreux compléments, est destiné en particulier aux étudiants de troisième année et aux étudiants préparant le CAPES.

Un des choix fondamentaux est de ne pas utiliser (explicitement) la Théorie générale de la Mesure et de l'Intégration, mais d'introduire le modèle probabiliste et les principaux concepts de base en théorie des Probabilités. Plusieurs annexes offrent des rappels mathématiques pouvant aider à la lecture du texte principal.

De nombreux exercices et contre-exemples sont proposés. Un ensemble de 25 problèmes, souvent inédits dans leur présentation et/ou leur contenu illustre le cours. À ces problèmes est adjointe une série de 10 problèmes, originaux pour la plupart et baptisés projets, qui demandent davantage de maturité et de réflexion et ouvrent des perspectives de développement de la théorie.

Pour tous ces exercices et problèmes, une solution est proposée. Par ailleurs comme bon nombre d'entre eux sont issus d'articles parus dans des journaux de recherche, on indique au lecteur leurs sources, lui permettant ainsi une éventuelle prolongation de sa réflexion.

Les deux auteurs, tous deux enseignants-chercheurs, ont enseigné dans les trois cycles des universités et ont, en particulier, assuré en collaboration durant plusieurs années un cours de Probabilités destiné aux étudiants du quatrième semestre du DEUG MASS. Ils sont membres de l'équipe de GRIMM de l'université de Toulouse Le Mirail et du Laboratoire de Statistiques et Probabilités de l'université de Toulouse et du Laboratoire de Statistiques et Probabilités de l'université Paul Sabatier, UMS C 5583.

Jacques Dauxois, agrégé de l'Université, professeur émérite à l'université de Toulouse 2.

Claudie Hassenforder, ancienne élève de l'ENS de Saint-Cloud-Fontenay, agrégée de l'Université, maître de conférences à l'université de Toulouse 2.

Illustration de couverture :

Georges de La Tour, *Le Tricheur à l'as de carreau* (détail).



9 782729 821630

ISBN 2-7298-2163-5